

«ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД УРО РАН» – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
НАУКИ ПЕРМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Загвозкин Тимофей Николаевич

**Неустойчивости и нелинейные режимы течения
в гетерогенных средах при наличии внешнего потока**

1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор
Любимова Татьяна Петровна

Пермь – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Моделирование поведения границы раздела двух жидкостей методом фазового поля	10
1.1. Теория фазового поля.....	10
1.2. Неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Холмбое.....	19
1.2.1. Введение.....	19
1.2.2. Постановка задачи.....	25
1.2.3. Численные результаты.....	28
1.2.4. Выводы по разделу 1.2	39
1.3. Моделирование подъема капли методом фазового поля.....	40
1.3.1. Введение.....	40
1.3.2. Постановка задачи.....	43
1.3.3. Численный метод.....	45
1.3.4. Оценка параметров.....	47
1.3.5 Численные результаты.....	49
1.3.5.1 Классический подход.....	49
1.3.5.2. Метод фазового поля.....	53
1.3.6. Выводы по разделу 1.3	62
Глава 2. Вымывание локализованных конвективных структур в пористой среде	64
2.1. Введение.....	64
2.2. Линейный анализ.....	68
2.2.1. Постановка задачи.....	68
2.2.2. Результаты работы.....	72
2.2.2.1. Монотонная неустойчивость.....	72
2.2.2.2. Колебательная неустойчивость.....	76
2.3. Численные расчеты.....	78
2.3.1. Постановка задачи.....	78

2.3.2. Результаты.....	80
2.4. Выводы по разделу 2.....	86
Заключение.....	88
Список литературы.....	91

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Вещества неоднородные по составу встречаются повсеместно, как в технологических процессах, так и в природе. При этом их компоненты могут смешиваться между собой и образовывать гомогенную однофазную систему, или гетерогенную двухфазную с границей раздела между ними. Наличие или отсутствие границ раздела между фазами обуславливает большое различие при описании таких систем. Существует множество моделей для описания двухфазных систем с границей раздела, но все они обладают определенными недостатками, что делает актуальным разработку новых моделей и улучшение существующих. Различные неустойчивости, возникающие в двухфазных средах (Кельвина-Гельмгольца, Релея-Тейлора и пр.), широко изучены в рамках классических моделей, но в реальных ситуациях могут играть роль неисследованные факторы, связанные, например, с межфазной границей. Перемешивание двух приведенных в контакт жидкостей может усиливаться, если начальное состояние системы не является термодинамически равновесным, при этом возникает вопрос об изменении со временем капиллярных эффектов на границе раздела – данная задача является слабо изученной.

Движение смешиваемых капель за счет сил плавучести представляет большой практический и теоретический интерес, что, в частности, мотивируется важностью сил поверхностного натяжения в определении формы и динамики смешиваемой капли, движущейся в окружающей среде. Имеется много свидетельств того, что смешиваемые границы раздела должны иметь некоторое небольшое динамическое поверхностное натяжение, которое может исчезнуть, когда смешиваемая система достигает состояния термодинамического равновесия. Точные измерения значений коэффициента поверхностного натяжения и правильное применение концепции динамического поверхностного натяжения является актуальной темой для исследования.

Тепловая конвекция в пористых средах представляет интерес как для прикладных задач, связанных с технологическими и природными процессами (например, фильтрация, охлаждение реакторов, добыча углеводородов и т.д.), так и с фундаментальной точки зрения. В связи со множеством практических приложений большое внимание исследователей привлекает развитие конвективных течений в пористых средах при наличии локализованных источников тепла.

Цели работы.

1) Определить закономерности поведения границ раздела в двухфазных системах слабосмешивающихся жидкостей; установить влияние неравновесного поверхностного натяжения, диффузии и др. факторов, на динамику таких систем.

2) Выявить особенности процесса вымывания локализованных конвективных структур из области их возбуждения в горизонтальном слое пористой среды с заданным тепловым потоком на границах.

Для достижения этих целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1) Исследовать возникновение неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое в двухфазной системе смешивающихся жидкостей в условиях, когда начальное состояние системы не является термодинамически равновесным.

2) Изучить динамику всплывания жидкой капли в другой жидкости, смешивающейся с первой.

3) Исследовать вымывание локализованных конвективных структур из области их возбуждения в горизонтальном слое пористой среды при наличии неоднородного по горизонтали вертикального теплового потока и постоянного прокачивания жидкости вдоль слоя.

Методология и методы исследования. Изучение динамики двухфазных систем смешивающихся жидкостей проводилось в рамках модели фазового поля,

численно с помощью метода конечных разностей. При исследовании процесса вымывания конвективных структур в пористом слое: линейная задача решалась аналитически, для решения нелинейной задачи применялся метод конечных разностей.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней впервые:

1. С учетом капиллярных эффектов исследованы неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Холмбое в системах смешивающихся жидкостей, не находящихся в начальный момент времени в состоянии термодинамического равновесия (начальное значение концентрации не является равновесным). Обнаружено, что усиление капиллярных эффектов приводит к появлению области устойчивости между областями неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Холмбое, что связано со стабилизацией неустойчивости Холмбое.

2. В рамках теории фазового поля выполнено прямое численное моделирование всплывания капли в другой жидкости, смешивающейся с первой. Показано, что метод фазового поля позволяет моделировать поверхностные эффекты на границе раздела смешивающихся жидкостей, что не удастся с помощью других методов. Обнаружено, что при малом поверхностном натяжении, как и в классическом подходе, пренебрегающем поверхностным натяжением, на коротких гидродинамических временных масштабах происходит перемешивание жидкостей и «растворение» капли. При конечном поверхностном натяжении оно играет определяющую роль в динамике капли, являясь более существенным фактором, чем межфазная диффузия.

3. Исследовано вымывание локализованных конвективных структур в горизонтальном слое пористой среды, насыщенной жидкостью, при наличии неоднородного потока тепла на границах и прокачивания жидкости вдоль слоя. Найдено, что при повышении разности значений теплового потока в области локального максимума нагрева и вне ее, критическое значение скорости, необходимой для вымывания конвективных структур, увеличивается.

Практическая и теоретическая значимость. Результаты, полученные при решении задачи о возникновении и развитии неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое, могут быть использованы в практических приложениях, связанных со смешиванием в системах жидкость/жидкость или газ/жидкость, эти процессы могут быть интенсифицированы за счет гидродинамических неустойчивостей, вызванных сдвиговыми потоками. Движение капель в системах смешивающихся жидкостей за счет сил плавучести представляет большой практический и теоретический интерес, например, для процессов масляной флотации, как одного из методов обогащения полезных ископаемых. Результаты изучения процессов вымывания локализованных конвективных структур в пористой среде могут иметь практическое значение для процессов вытеснения одной жидкости другой, что, например, встречается при добыче углеводородов путем их прокачки водой.

Положения, выносимые на защиту:

1. Усиление капиллярных эффектов в системах смешивающихся жидкостей, не находящихся в начальный момент времени в состоянии термодинамического равновесия, приводит к появлению области устойчивости между областями неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое, что связано со стабилизацией неустойчивости Холмбое.
2. Метод фазового поля позволяет моделировать поверхностные эффекты на границе раздела смешивающихся жидкостей, что не удается с помощью других методов. При малом поверхностном натяжении, как и в классическом подходе, пренебрегающем поверхностным натяжением, на коротких гидродинамических временных масштабах происходит перемешивание жидкостей и «растворение» капли. При конечном поверхностном натяжении оно играет определяющую роль в динамике капли, являясь более существенным фактором, чем межфазная диффузия.
3. При повышении разности значений теплового потока в области локального максимума нагрева и вне ее критическое значение скорости,

необходимой для вымывания локализованных конвективных структур, увеличивается.

Достоверность результатов численных расчетов обеспечена хорошим соответствием результатов расчетов, аналитическими формулами и данными физических экспериментов, анализом сходимости полученных данных при изменении шага расчетной сетки. А также согласием результатов, полученных с использованием различных численных методов.

Апробация результатов. Результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на следующих конференциях: Международный симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2017); Всероссийская конференция с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2018, 2019); XX и XXI Зимние школы по механике сплошных сред (Пермь, 2017, 2019); 9th Conference of the International Marangoni Association (Guilin, China, 2018); XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019); VII Российская конференция «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения», посвященная 80-летию академика РАН Р.И. Нигматулина (Уфа, 2020); 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Milano, Italy, 2021). Помимо перечисленных выше конференций результаты исследований докладывались на научных семинарах: Пермском городском гидродинамическом семинаре имени проф. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова (Пермь, 2020, руководитель Т.П. Любимова, номера заседаний: 1537, 1538, 1566), научный семинар в Удмуртском государственном университете (2020).

Публикации. Материалы диссертации изложены в 13 работах [1-13], включая 4 работы в журналах из списка ВАК [1-4], которые также индексируются в международных базах данных Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Автором диссертации разработаны вычислительные программы, получены все численные результаты. Постановка задач, обсуждение и

анализ результатов первой главы осуществлены совместно с научным руководителем Т.П. Любимовой и соавтором публикаций А.М. Воробьевым. Постановка задачи вымывания конвективных структур в слое пористой среды с заданным тепловым потоком, а также обсуждение и анализ результатов осуществлены совместно с научным руководителем Т.П. Любимовой.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 2-х содержательных глав, заключения и списка литературы (138 наименований). Объем диссертации составляет 102 страницы, включая 38 рисунков.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ МЕТОДОМ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

1.1. Теория фазового поля

Теория фазового поля представляет собой математическую модель для описания гетерогенных систем с межфазными границами. В рамках этой модели толщина границы раздела считается малой, но конечной. Положение границы определяется с помощью поля параметра порядка (концентрации, плотности и т.п.).

Первая модель, в которой предполагалось, что граница раздела имеет конечную толщину, была предложена Ван дер Ваальсом в [14,15]. До этого, при рассмотрении задач, учитывающих капиллярные эффекты, общепринятым было представление о том, что межфазная граница является бесконечно тонкой.

Кортевегом в [16] была выдвинута гипотеза о том, что, по аналогии с гидродинамическими напряжениями в однородной жидкости, на границе раздела двух фаз возникают напряжения, зависящие от градиента концентрации.

Термодинамическое поведение бинарной смеси может быть описано с использованием функции свободной энергии. Кан и Хиллард в своей работе [17] вывели выражение для свободной энергии в предположении, что свободная энергия бинарной системы зависит как от собственно концентрации (здесь и далее под концентрацией подразумевается массовая концентрация, т.е. отношение массы компонента к общей массе смеси), так и от её пространственных производных.

В работе [18], Кан и Хиллард получили уравнение диффузии, используя выражение для первого закона Фика в обобщенной форме с добавлением слагаемого, ответственного за межфазное взаимодействие (в качестве движущей силы выступал градиент химического потенциала). В дальнейшем это уравнение диффузии было названо уравнением Кана-Хилларда. Полученные в [17,18]

теоретические выражения для свободной энергии, диффузионного потока и другие результаты использовались в работах Кана и Хилларда [18-23].

Метод фазового поля был успешно применен для исследования роста дендритов. В работе [24], на основе этого метода, разработана комплексная модель для решения уравнений диффузии тепла и растворенных веществ во время кристаллизации; выполнены двумерные вычисления для идеальных растворов и для дендритного роста в изотермическую и сильно пересыщенную жидкую фазу; получены реалистичные модели роста, которые включают развитие, укрупнение и слияние вторичных и третичных дендритных ветвей.

На основе теории фазового поля были также рассмотрены задачи эвтектического затвердевания. В [25] представлены результаты моделирования процесса кристаллизации в тройных сплавах $Ni_{60}Cu_{40-x}Cr_x$, исследовано влияние состава сплава на морфологию и скорость роста; получена морфологическая диаграмма, которая показывает переход от дендритной к шаровидной структуре с увеличением концентрации Cr.

В [26] на основе метода фазового поля показано, что, подобно бинарным сплавам, спинодальное разложение в тройной системе обычно приводит к взаимосвязанным морфологическим изменениям на самых ранних стадиях разложения, для большинства исследованных систем разложение гомогенной фазы на три фазы происходит в два этапа.

В [27] представлен подход теории фазового поля для моделирования упругой и пластической деформации, свободных поверхностей и множественных ориентаций кристаллов в неравновесных процессах, представлено численное моделирование для ряда важных приложений, включая эпитаксиальный рост, рост зерен, восстановительные фазовые переходы и распространение трещин.

В [28] рассмотрены морфологические неустойчивости в бинарных многослойных системах и эволюция таких систем после развития

неустойчивостей; рассмотрены сплавы с промежуточной фазой и без нее, а также случаи со стабильной и метастабильной промежуточными фазами.

Фазово-полевой подход был также использован для анализа многофазных течений. В [29] рассмотрены гидродинамические модели с диффузной границей раздела и их применение к широкому спектру межфазных явлений, в которых представляющие интерес физические явления имеют масштаб длины, соизмеримый с толщиной межфазной области (межфазные явления в околоскритических системах или мелкомасштабные потоки, которые происходят вблизи контактных линий) и потоки жидкости, связанные с большими деформациями границы раздела и/или топологическими изменениями (например явления разрушения и коалесценции, связанные со струями жидкости или каплями).

В работе [30] исследована проблема неактивного и реактивного смачиваний, модель фазового поля учитывает диффузионный характер кинетики тройной линии «газ–жидкость–твердое тело». Это исследование продемонстрировало отличное согласие с экспериментальными данными, включающими две неактивные и одну реактивную системы. Таким образом, было подтверждено, что динамика границ раздела в сложных условиях смачивания хорошо описывается как качественно, так и количественно методом фазового поля.

В работе [31], с использованием модели фазового поля, исследована задача уплотнения металлического порошка в процессе лазерного плавления, описана динамика образования пор и газовых пузырьков в зоне расплава; предложен двухступенчатый механизм уплотнения, который отличается от одноступенчатого механизма, типичного для аддитивного производства полимерных порошков.

Моделирование динамики эмульсий и суспензий с модификацией метода фазового поля на случай числа фаз, большего двух, проведено в работах [32,33].

В диссертации используется теоретическая модель, основанная на системе уравнений, полученной Ловенгрубом и Трускиновским [34]. Вывод уравнений в их работе является термодинамически обоснованным, в то время как вывод многих других вариантов уравнений фазового поля является скорее эмпирическим. Похожую модель фазового поля для несжимаемой жидкости вывел Антоновский [35], исходя из принципа максимальной энтропии.

Идея фазово-полевого подхода заключается в применении одной системы управляющих уравнений для определения гидродинамических полей во всей многофазной системе, включая границы раздела фаз. Границы раздела представляются переходными слоями конечной толщины. Положение границ раздела определяется по полю концентрации, а именно, переходные слои соответствуют областям с большими градиентами концентрации. Для учета эффектов поверхностного натяжения, связанных с межфазными границами, в функцию свободной энергии смеси добавляется новое градиентное слагаемое [17]

$$f(C, \nabla C) = f_0(C) + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla C)^2. \quad (1)$$

здесь, f - удельная свободная энергия бинарной смеси, f_0 - ее классическая часть (описывающая термодинамическое поведение без учета эффекта поверхностного натяжения на границе раздела фаз, и зависящая только от C как, например, в [36]), C - концентрация, которая определяется как массовая доля одного из компонентов смеси, ε - капиллярная константа, определяющая поверхностные эффекты. Эта константа обычно настолько мала, что второе слагаемое пренебрежимо мало всюду, за исключением мест с большими градиентами концентрации, т.е. за исключением переходного слоя.

Полная система уравнений гидродинамики бинарной смеси, описываемой функцией свободной энергии (1), была выведена Ловенгрубом и Трускиновским [34]. Однако эти уравнения сложны для прямого численного моделирования, поскольку они включают в себя полное уравнение непрерывности, учитывающее

эффект квазисжимаемости, связанный с зависимостью плотности смеси от концентрации. Позднее было показано, что медленная конвективная и диффузионная эволюция смеси может быть описана на основе уравнений, которые представляют собой приближение Буссинеска полных уравнений Кана-Хилларда-Навье-Стокса [37-39] (при этом с помощью метода многих масштабов отфильтровываются эффекты квазисжимаемости, в полученных уравнениях переменность плотности учитывается только в слагаемых с массовыми силами). В диссертационной работе уравнения Кана-Хилларда-Навье-Стокса в приближении Буссинеска используются для численного моделирования эволюции гетерогенной бинарной смеси.

Описанные выше уравнения включают уравнения сохранения импульса, концентрации и массы

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \Pi + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u} - C \nabla \mu, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) C = \frac{1}{\text{Pe}} \nabla^2 \mu, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (4)$$

Здесь \vec{u} - скорость жидкости, t - время, Π - модифицированное давление ($\Pi = p + \text{Cn} \frac{(\nabla C)^2}{2}$, где p - давление, Cn - число Кана), μ - химический потенциал, C - концентрация, Re - число Рейнольдса, Pe - число Пекле. Уравнение Навье-Стокса (2) включает дополнительное слагаемое (часто называемое силой Кортвега), которое учитывает влияние поверхностного натяжения на границе раздела жидкость/жидкость. Процесс диффузии обусловлен градиентом химического потенциала, который определяется следующим выражением [34]

$$\mu = \text{Gr}(\vec{r} \cdot \vec{\gamma}) + \frac{\partial f_0}{\partial C} - \text{Cn} \nabla^2 C. \quad (5)$$

Здесь Gr - число Грасгофа, \vec{r} - радиус-вектор, $\vec{\gamma}$ - вектор, направленный против силы тяжести.

Классическая часть функции свободной энергии, f_0 , выбирается таким образом, чтобы описать ожидаемое термодинамическое поведение бинарной смеси (в виде двухмяного потенциала). В диссертационной работе изучается эволюция гетерогенной бинарной смеси, претерпевающей фазовые превращения. Рассматривается бинарная смесь с верхней критической температурой раствора, когда компоненты смеси смешиваются во всех пропорциях при температурах, выше критической, и только частично смешиваются (до определенного уровня растворимости), если температура смеси ниже критического значения. Это самый распространенный тип поведения бинарных смесей. Термодинамическое поведение такой смеси может быть описано формулой Ландау [36]

$$f_0 = AC^2 + C^4. \quad (6)$$

Здесь A – безразмерный параметр, определяющийся как $A=a/b$, где a и b являются стандартными феноменологическими параметрами теории Ландау для околоскритических систем [36].

Другой выбор классической части функции свободной энергии соответствует функции "регулярных решений" (также известной как теория Флори-Хаггинса), которая часто используется для описания термодинамического поведения полимерных растворов [32,40,41]

$$f_0 = \left(A - \frac{3}{2}\right) C^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} + C\right) \ln \left(\frac{1}{2} + C\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - C\right) \ln \left(\frac{1}{2} - C\right). \quad (7)$$

Здесь используется исходное определение концентрации, как массовой доли одного из компонентов смеси, которая изменяется в интервале $[0..1]$ и модифицируется заменой, $C \rightarrow (C - C_{cr})$. Кроме того, предполагается, что фазовая диаграмма симметрична относительно точки $C_{cr} = 1/2$, в результате диапазон модифицированной концентрации составляет $[-1/2..1/2]$.

На рисунке 1.1a приведены графики функций (6) и (7), а на рисунке 1.1b - полученные на основе функций (6) и (7) фазовые диаграммы в координатах (A, C) ,

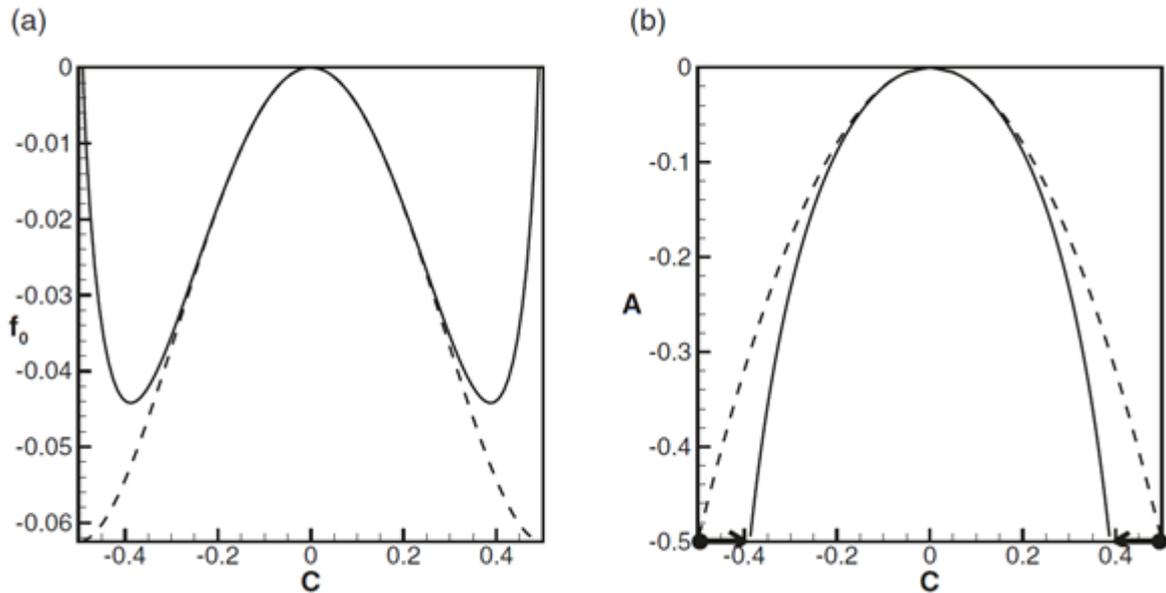


Рис.1.1. Классическая часть функции свободной энергии (а) и фазовая диаграмма (б), определяемые формулами (7) - сплошные линии и (6) - штриховые линии. Жирные точки на (б) обозначают начальное состояние смеси, а стрелки - направления термодинамических превращений, испытываемых смесью, рассматриваемой в диссертации.

определяющие равновесные состояния смеси. Видно, что критическая точка смеси определяется координатами ($A=0$, $C=0$). При $A>0$ смесь всегда гомогенна в равновесии, и может быть либо гомогенной, либо гетерогенной (что определяется общим балансом масс) при $A<0$. Таким образом, безразмерный параметр A , который фигурирует в формулах (6) и (7), играет роль температуры смеси.

Функции (6) и (7) дают схожие фазовые диаграммы, обе эти диаграммы воспроизводят особенности наблюдаемого экспериментально термодинамического поведения, фазовая диаграмма которого приведена на рисунке 1.2. Таким образом, с точки зрения адекватного описания поведения, наблюдаемого в экспериментах, обе функции могут быть успешно использованы. Тем не менее, прежде всего в силу вычислительных причин (логарифмические слагаемые помогают избежать выхода значений концентрации за пределы рассматриваемого диапазона при численном

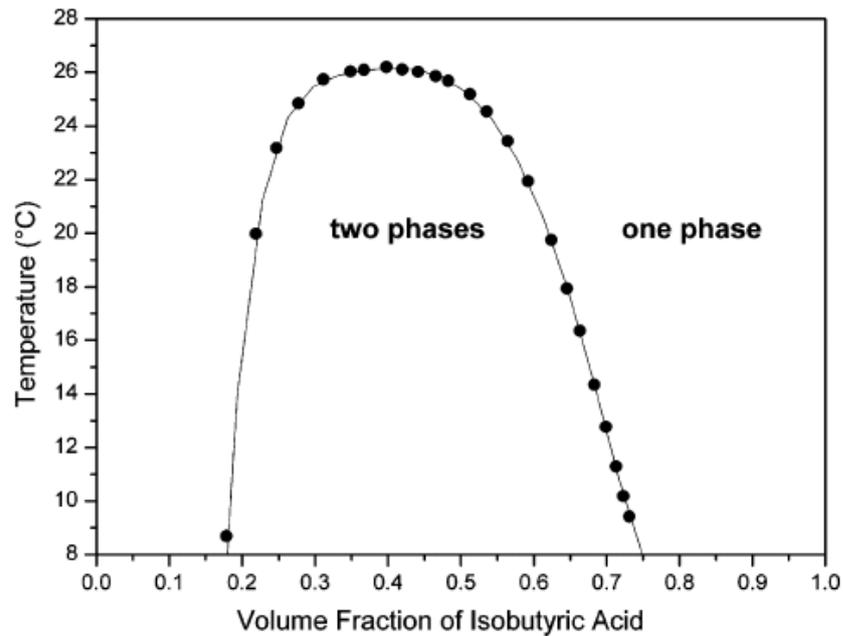


Рис.1.2. Фазовая диаграмма системы «вода-изомасляная кислота», полученная экспериментально в [47].

счете), в диссертационной работе использовалась функция (7), в диапазоне физически значимых значений концентраций $[-1/2..1/2]$. Из рисунка 1.1 видно, что функция свободной энергии (7) совпадает с функцией Ландау (6) вблизи критической точки и отличается от нее при $|C| \rightarrow 1/2$, где нефизические значения концентрации, получающиеся из (6) исключаются логарифмическими членами в (7). Функция (7) ранее использовалась при рассмотрении других физических задач об эволюции гетерогенных бинарных систем [42-46].

Уравнения (2-4) записаны в безразмерной форме. Для обезразмеривания использовались следующие единицы

$$L_* = h, u_* = \mu_*^{1/2}, \mu_* = b, \tau = \frac{L_*}{u_*}, \Pi_* = \rho_* \mu_*. \quad (8)$$

Здесь L_* - единица длины, h – характерный размер, u_* - единица скорости, μ_* - единица химического потенциала, τ - единица времени, Π_* – единица давления, ρ_* - характерное значение плотности, например, плотность одной из компонент смеси.

Уравнения содержат следующие безразмерные параметры: число Пекле, число Рейнольдса, число Грасгофа, число Кана

$$Pe = \frac{\rho_* L_*}{\alpha \mu_*^{1/2}}, Re = \frac{\rho_* \mu_*^{1/2} L_*}{\eta_*}, Gr = \varphi \frac{g L_*}{\mu_*}, Cn = \frac{\varepsilon}{\mu_* L_*^2}. \quad (9)$$

Здесь α - коэффициент подвижности, $\varphi = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_*$ - относительный перепад плотностей, g - ускорение свободного падения. Для первых трех параметров используются названия, обычно применяемые для параметров, появляющихся в аналогичных слагаемых уравнений гидродинамики и играющих сходную роль в рассматриваемых процессах, хотя эти параметры определяются не через традиционно используемые для них величины, а через феноменологические параметры, которые вводятся в рамках метода фазового поля.

Число Пекле Pe определяет относительную важность диффузионных эффектов. Значение коэффициента подвижности можно оценить как $\alpha = \rho_* D / \mu_*$, где D - обычный коэффициент молекулярной диффузии. В диссертационной работе предполагается, что число Пекле всегда велико, что означает, что диффузия относительно слаба, по крайней мере, на коротких временных интервалах.

Число Рейнольдса Re определяет значимость вязких сил. В диссертационной работе для простоты считается, что коэффициенты вязкости компонент смеси одинаковы, так что достаточно использование одного числа Рейнольдса.

Число Грасгофа Gr определяет важность гравитационных сил. Предполагается, что относительный перепад плотностей мал, что справедливо для большинства систем жидкость/жидкость. Гравитационный член входит в управляющие уравнения через выражение для химического потенциала (5).

Число Кана Cn определяет вклад капиллярных сил. Оно также задает равновесную толщину поверхности раздела, которая определяется в [32,48] как

$$\delta_{eq} = \sqrt{-Cn/A}.$$

Еще одним безразмерным параметром в уравнениях (2-5) является введенный выше параметр A , определяющий "температуру" смеси (характеризующий термодинамическое поведение смеси).

Уравнения (2-5) должны быть дополнены граничными условиями. Обычно на твердых границах задается равенство нулю вектора скорости (условие прилипания), нормальной производной химического потенциала (отсутствие диффузионного потока вещества через границы), и нормальной производной концентрации (условие нейтрального смачивания, т.е. ортогональность линии контакта границе).

1.2. Неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Холмбое

1.2.1. Введение

Смешивание в системах жидкость/жидкость или газ/жидкость может интенсифицироваться за счет гидродинамических неустойчивостей, например, неустойчивостей, вызванных сдвиговыми потоками. Известно, что сдвиговое течение в системе двух однородных по плотности жидкостей может стать неустойчивым вследствие скачка касательной компоненты скорости на границе раздела (неустойчивость тангенциального разрыва или неустойчивость Кельвина-Гельмгольца [49,50]). Эта неустойчивость изучалась во многих работах, основные результаты обобщены в монографиях [51,52].

На развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца может влиять плотностная стратификация жидкостей. Плотностная стратификация определяется числом Ричардсона $Ri=N^2/U^2$, где U - средняя скорость элемента жидкости и N - частота Вайсала (частота, с которой элемент жидкости, перемещенный вертикально в стратифицированной среде, будет в этой среде осциллировать [53])

$$N(y) = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dy}}. \quad (10)$$

В этой формуле ρ – плотность жидкости, g - ускорение силы тяжести, y - вертикальная координата.

Майлз и Говард [54] обнаружили, что неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в двухслойной системе стратифицированных по плотности жидкостей не развивается, если стратификация сильная, а именно, когда $Ri > 1/4$ во всей области. Однако Холмбое [55] показал, что, если толщина слоя скачка плотности значительно меньше толщины слоя скачка касательной скорости на границе раздела, то, несмотря на сильную плотностную стратификацию, течение может стать неустойчивым из-за новой неустойчивости, которая развивается за счет нарастания двух бегущих волн. Таким образом, в системе стратифицированных по плотности жидкостей сдвиговый поток может стать неустойчивым как вследствие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, так и вследствие неустойчивости Холмбое.

В более поздних исследованиях были определены границы неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое для различных профилей плотности и скорости [56-62], в том числе для тех случаев, когда центральные точки профилей плотности и скорости не совпадают [63,64]. Было также изучено влияние других осложняющих факторов, таких как поверхностное натяжение [65], контраст плотностей [66,67], диффузия [68,69]. Существование неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое было подтверждено экспериментально в [70-72].

Волновая неустойчивость Холмбое является одним из классических примеров сдвиговой неустойчивости в стратифицированной жидкости, она обусловлена взаимодействием между внутренними гравитационными волнами на границе раздела и волнами завихренности по обе стороны сдвигового слоя. Показано, что это явление важно для перемешивания океана [73].

Исторически сложилось так, что неустойчивость Холмбое изучалась с помощью анализа линейной устойчивости при бесконечном числе Рейнольдса Re , или прямого численного моделирования при относительно низком Re , в областях параметров, при которых, как известно из результатов анализа линейной устойчивости невязкой жидкости, наблюдается неустойчивость. В работе [74], авторы выполнили анализ линейной устойчивости стратифицированного сдвигового слоя в рамках классической "модели Хейзела" (в предположении, что распределения скорости и плотности задаются гиперболическими тангенсами с различными характерными вертикальными масштабами) при конечном Re . В частности, была обнаружена неустойчивость, когда число Ричардсона $Ri > 1/4$, хотя система должна быть устойчива при бесконечном Re по теореме Майлза–Говарда. Для течений, в которых обычно изучается неустойчивость Холмбое, включая кусочно-линейный профиль [55], односторонний профиль [60], а также гладкий профиль, изученный в [58], число Ri исчезающе мало вдали от переходного слоя, поэтому теорема не выполняется, несмотря на сколь угодно большие объемные числа Ричардсона. С другой стороны, когда объемное число Ричардсона невелико, внутренние волны недостаточно интенсивны, и поэтому неустойчивость Кельвина–Гельмгольца преобладает над неустойчивостью Холмбое.

Хотя теорема Майлза–Говарда доказана только для невязких течений, число Ричардсона равное одной четверти часто используется в качестве критерия устойчивости в океанографии и смежных областях. Это обусловлено тем, что для того, чтобы присутствовала неустойчивость Холмбое [75], слой скачка плотности должен быть узким по сравнению со сдвиговым слоем, что выражается в большом значении отношения R толщины сдвигового слоя к толщине слоя скачка плотности.

Однако, авторы [76] показали, что при $Ri > 1/4$ неустойчивость сдвигового течения возможна, если ввести вязкость. Это приводит к возможности того, что неустойчивость Холмбое будет существовать даже тогда, когда R порядка единицы, $Ri > 1/4$ и при конечном числе Рейнольдса. Такая неустойчивость была продемонстрирована для единственного конкретного набора параметров авторами

[77]. Это может иметь глубокие последствия для понимания геофизических процессов, поскольку известно, что интенсивности перемешивания жидкости за счет неустойчивостей Холмбое и Кельвина-Гельмгольца сильно различаются [73].

В дополнение к доказательству теоремы Майлза–Говарда, Говард в [54] доказал важный результат, который называется теоремой о полукруге Говарда. Эта теорема гласит, что для невязкого плоскопараллельного стратифицированного сдвигового потока комплексная фазовая скорость любого неустойчивого режима должна располагаться в полукруге с центром в точке средней скорости на действительной оси, с радиусом равным половине разности максимальной и минимальной скоростей потока. Хотя это трудно интерпретировать напрямую, это имеет непосредственное следствие, заключающееся в том, что фазовая скорость любой неустойчивости должна находиться между максимальной и минимальной скоростями потока. Для плавного профиля скорости это означает, что существует критический слой, в котором фазовая скорость равна скорости потока. Поведение неустойчивостей в критическом слое хорошо изучено [78-80], однако теорема о полукруге доказана только для невязких течений, и не обобщается на случай учета вязкости.

В литературе существуют две различные физические интерпретации стратифицированной сдвиговой неустойчивости. Первая, первоначально предложенная автором в [81], в дальнейшем развитая в [60,61,82,83] и подробно рассмотренная в [84], — это идея о том, что в паре волны могут совпадать по фазе и взаимно усиливать друг друга, если совпадают соответствующие характеристики. Это приводит к классификации трех канонических неустойчивостей: Кельвина-Гельмгольца - резонанс двух волн завихренности; Холмбое - резонанс волны завихренности и внутренней волны; и так называемая неустойчивость Тейлора-Колфилда [81,85] - резонанс двух внутренних волн. На практике различие между ними не является четким [62,86].

Есть веские доказательства того, что взаимодействие гравитации и волн завихренности ответственно за (по крайней мере, в невязком случае) неустойчивость Холмбое. Например, в [87] обнаружены дополнительные области неустойчивости при более высоких значениях Ri , которые, по-видимому, вызваны резонансом гармоники гравитационной волны более высокого порядка с волной завихренности. В кусочно-линейной модели непосредственное рассмотрение взаимодействия двух волн приводит к точному прогнозированию зоны неустойчивости Холмбое [60,61]. Одна из основных проблем с этим описанием волнового резонанса заключается в том, что оно не учитывает теорему Майлза–Говарда. Неясно, почему при более широком слое скачка плотности волны больше не должны резонировать и вызывать развитие неустойчивости. Кроме того, хотя неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, по-видимому, связана с взаимодействием двух волн завихренности, теория пока не смогла объяснить затухание этой неустойчивости при увеличении числа Ричардсона.

Другая точка зрения, предложенная Линдзен и соавторами, и рассмотренная в [88], основана на идее, что, когда локальное число Ричардсона меньше одной четверти, нормальные моды волн, падающих на переходный слой, будут «переотражаться», и при правильной конфигурации это может привести к экспоненциальному росту. Эта теория, хотя и более трудна для интуитивного понимания, чем картина волнового резонанса, тем не менее привлекательна, поскольку она явно включает критерий Майлза–Говарда. Однако Смит и Пельтье показали [89], что, хотя «переотражение» волн может точно предсказать возникновение неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое по отдельности, вблизи перехода между ними, теория остается недостаточной.

В диссертационной работе на основе метода фазового поля изучается эволюция гетерогенной бинарной смеси. Как отмечалось выше, этот метод представляет границу раздела фаз в виде переходного слоя конечной толщины, причем все переменные, включая плотность, испытывают резкие, но непрерывные изменения на межфазной границе. При наложении сдвигового течения вдоль

границы раздела фаз получается классическая задача устойчивости сдвигового течения в стратифицированной по плотности среде. Однако, метод фазового поля позволяет получить более полное описание многофазной системы, чем другие методы. В отличие от других методов он позволяет учесть влияние межфазных напряжений, возникающих на границе раздела смешивающихся жидкостей [40,90].

Фазово-полевой подход основан на обобщенном законе Фика, который предполагает, что диффузионный поток пропорционален градиенту химического потенциала. Это обобщение, в частности, позволяет описывать межфазную диффузию в частично смешивающихся жидкостях, которые смешиваются до тех пор, пока не будут достигнуты уровни насыщения в соседних фазах (что является очевидным случаем, когда закон Фика неприменим, так как в этом случае имеется большой градиент концентрации на границе раздела, но нет межфазной диффузии, а классический закон Фика справедлив только для малых градиентов концентрации).

Все эти особенности делают исследования, проводимые в диссертационной работе, отличными от других исследований неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое. В диссертационной работе изучается развитие классических гидродинамических неустойчивостей в двухфазной системе смешивающихся жидкостей, в то время как в других исследованиях изучается развитие неустойчивостей либо в однофазной стратифицированной среде, либо в двухфазной системе несмешивающихся жидкостей.

Линейный анализ устойчивости границы раздела фаз в гетерогенной бинарной системе при наличии сдвигового потока проведен в рамках модели фазового поля в работе [91], в предположении о "замороженной границе раздела", т.е. на предположении о том, что диффузионное расширение границы раздела происходит гораздо медленнее, чем рост гидродинамических возмущений. Определены границы неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое. Показано, что размер зон неустойчивостей больше для более тонких границ

раздела. Размер зон неустойчивостей также увеличивается за счет диффузионного и капиллярного эффектов. Установлено, что вязкость, как обычно, играет стабилизирующую роль.

В диссертационной работе методом фазового поля, путем решения полных нелинейных уравнений гидродинамики двухфазной бинарной смеси, исследуются возникновение и нелинейное развитие неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое, с учетом влияния межфазных напряжений и нефииковских диффузионных эффектов, при этом граница раздела может изменяться со временем (не вводится предположение о "замороженной границе раздела"), что качественно отличает данную работу от [91].

1.2.2. Постановка задачи

Рассматривается система, состоящая из двух плоских горизонтальных слоев смешивающихся жидкостей, которые первоначально разделены горизонтальной границей раздела. Предполагается, что жидкости приводятся в контакт, при этом начальное термодинамическое состояние смеси отличается от состояния термодинамического равновесия, что индуцирует процесс межфазной диффузии. Более легкая жидкость помещается поверх более плотной. Дополнительно вдоль границы раздела накладывается сдвиговое течение. Предполагается, что смесь изотермическая.

В расчетах рассматривается прямоугольная вычислительная область, представляющая собой ячейку бесконечного горизонтального слоя. Горизонтальный размер области выбирается равным длине волны начального возмущения λ , и таким образом он разный для различных расчетов. На вертикальных границах области накладываются периодические граничные условия. Изучается устойчивость границы раздела жидкость/жидкость по отношению к одномодовому гармоническому возмущению, характеризующемуся

волновым числом $k = 2\pi/\lambda$. Вертикальный размер области используется в качестве единицы длины. Горизонтальные и вертикальные координаты обозначаются через x и y , соответственно.

Начальный профиль концентрации задается выражением

$$C_0(x, y) = 0.495 \tanh\left\{\frac{y - 0.5(1 + 0.1 \cos(kx))}{\delta_0}\right\}. \quad (11)$$

Здесь 0.495 - начальные концентрации в двух контактирующих жидкостях, δ_0 - начальная толщина границы раздела (толщина слоя скачка концентрации). Амплитуда возмущения выбрана равной 0.1 для всех расчетов.

Внешний наложенный поток вдоль границы раздела задается следующим профилем

$$U(y) = U_0 \tanh\left(\frac{y - 0.5}{\delta_U}\right). \quad (12)$$

Здесь U_0 - амплитуда и δ_U - толщина слоя скачка скорости.

На рисунке 1.3 приведен начальный профиль концентрации с наложенными векторами скорости потока для определенного набора параметров.

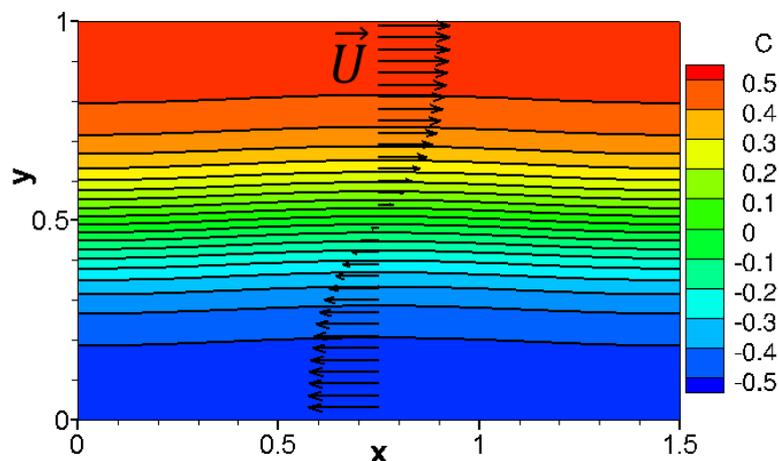


Рис.1.3. Поле концентрации, заданное выражением (11), и векторы скорости наложенного потока, заданные выражением (12), для $\delta_0=0.2$, $\delta_U=0.2$, $U_0=0.2$.

В диссертационной работе толщины слоёв скачков концентрации и скорости рассматриваются как два независимых параметра. Поскольку рассматривается эволюция термодинамически-неравновесной бинарной смеси, то начальная толщина слоя скачка концентрации берется отличной от равновесной толщины границы раздела $\delta_{eq} = \sqrt{-Cn/A}$.

Скорость представляется как сумма скорости наложенного потока и скорости возмущений $\vec{u} = U\vec{i} + \vec{v}$ (единичный вектор \vec{i} определяет направление наложенного сдвигового потока и совпадает с направлением оси x).

На нижней и верхней границах ставились условия отсутствия касательных напряжений и нормальной компоненты скорости, и условие непроницаемости для y -компонент скорости движения жидкости. Граничные условия для химического потенциала и концентрации предполагают отсутствие диффузионного потока через стенки, а также условие нейтрального смачивания. В диссертационной работе исследуется развитие неустойчивостей вблизи границы раздела, которая находится в середине слоя, вдали от горизонтальных границ. Условия на этих границах менее важны для данного исследования, и граничные условия были выбраны таким образом, чтобы минимизировать их влияние на потоки в основном объеме.

$$y = 0,1: \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad v_y = 0, \quad \frac{d\mu}{dy} = 0, \quad \frac{dC}{dy} = 0. \quad (13)$$

Рассматриваются двумерные возмущения, в этом случае удобно ввести функцию тока и завихренность, связанные с компонентами скорости соотношениями: $v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial x$, $\omega = (\partial v_x/\partial y - \partial v_y/\partial x)$. Уравнения (2-5) и граничные условия, переписанные в терминах функции тока и завихренности имеют вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = \frac{1}{Re} (-U''' + \nabla^2\omega) + J(\mu, C), \quad (14)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + J(C, \psi) = \frac{1}{Pe} \nabla^2\mu, \quad (15)$$

$$\nabla^2\psi = -\omega, \quad (16)$$

$$\mu = Gr \cdot y + \frac{3}{4} \ln \left(\frac{1/2+C}{1/2-C} \right) - (3 - 2A)C - Cn\nabla^2 C, \quad (17)$$

$$\psi = 0, \quad \omega = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

Здесь $J \equiv \partial/\partial x - \partial/\partial y$, штрихом обозначена производная по y .

Уравнения решаются с применением конечно-разностного подхода. Используется аппроксимация второго порядка по пространственным переменным и первого порядка по времени. Уравнение для функции тока решается итерационным методом Гаусса-Зейделя. Используется равномерная по пространству сетка. Решение производится по явной схеме с постоянным шагом по времени.

1.2.3. Численные результаты

Для определения оптимального числа узлов сетки были выполнены тестовые расчеты с использованием сеток с различным числом вычислительных узлов. Результаты этих вычислений показаны на рисунке 1.4. Построены зависимости от времени кинетической энергии возмущений

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V v^2 dV. \quad (19)$$

Здесь V - объем вычислительной области, а также зависимости от времени длины межфазной границы для двух различных амплитуд внешнего наложенного потока $U_0=0.2$ (рис. 1.4а и рис. 1.4b) и $U_0=0.4$ (рис. 1.4с и рис. 1.4d). Видно, что возмущения затухают при меньшем скачке скорости сдвигового потока и растут при большем.

На рисунке 1.4 представлены результаты, полученные с использованием сеток с различным разрешением. Видно, что расстояние между кривыми уменьшается при постепенном повышении численного разрешения, т.е. наблюдается сходимост, при измельчении шага сетки. В случаях, когда неустойчивость не возникает, кривые остаются близкими друг к другу на

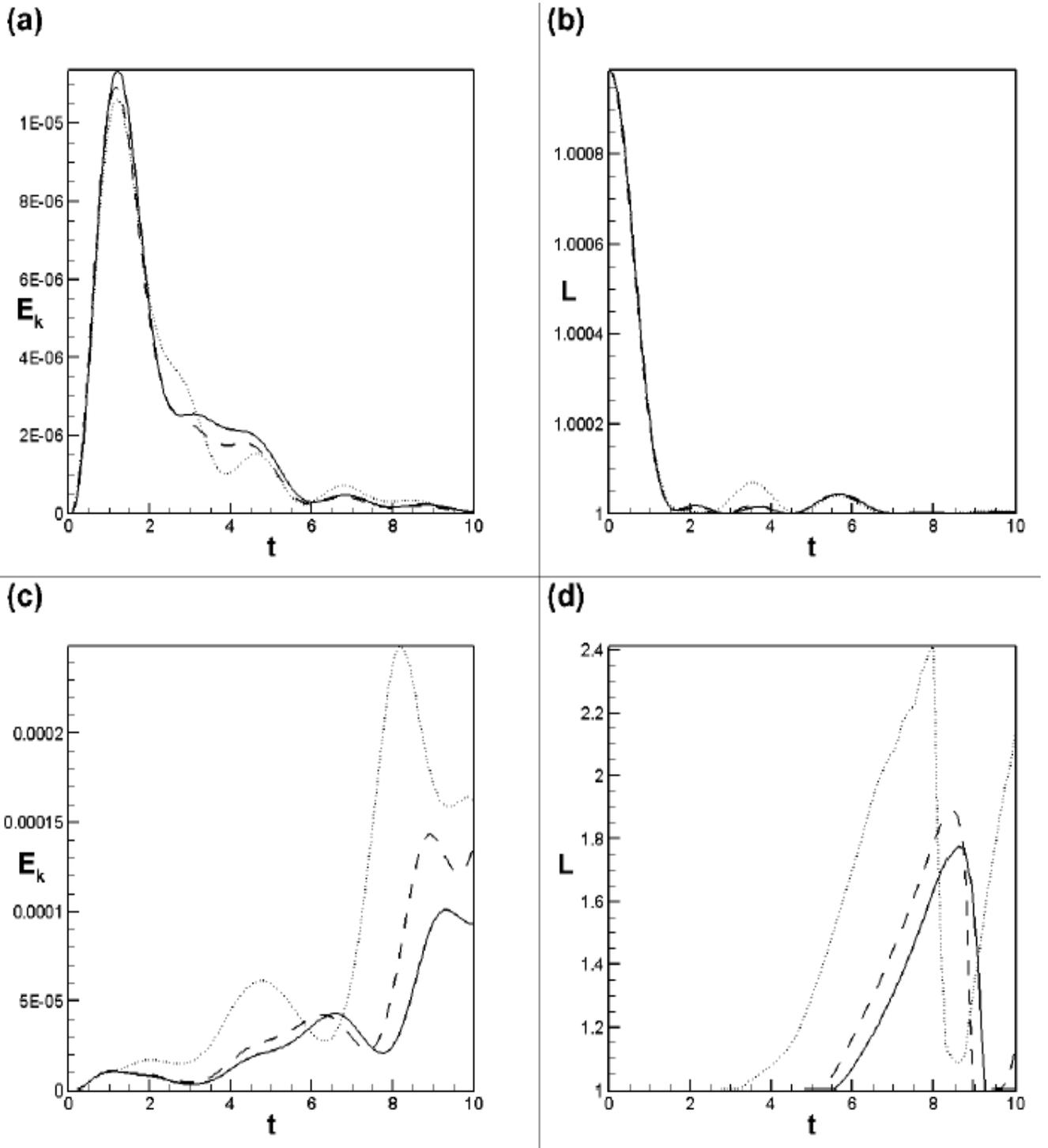


Рис.1.4. Временные зависимости полной кинетической энергии (а,с) и длины границы раздела (b,d) построены для численных расчетов, выполненных с использованием различных сеток, с узлами 250x250 (точка-тире), 500x500 (пунктир) и 750x750 (сплошные). Другими параметрами для этих расчетов: $k = 6.28$, $Pe = 10^6$, $Cn = 4 \cdot 10^{-4}$, $\delta_0 = \delta_U = 0.028$ и $U_0 = 0.2$ (a,b) и $U_0 = 0.4$ (c,d).

протяжении всего интервала времени моделирования, пока начальные возмущения полностью не затухнут. В случае, когда развивается неустойчивость, кривые, полученные с использованием различных сеток, в конечном итоге расходятся друг от друга. Хотя, как видно из рисунков 1.4с и 1.4d, для набора параметров, используемых для получения этого рисунка, кривые с двумя лучшими разрешениями остаются достаточно близкими по крайней мере до тех пор, пока $t \leq 10$. Исходя из этого был сделан вывод, что сетка с линейным размером ячейки 1/500 достаточна для получения удовлетворительных по точности результатов о начальной эволюции смеси при $t \leq 10$, для отслеживания роста возмущения на более длинном временном интервале более высокое разрешение было бы необходимо. Кроме того, улучшенное разрешение может потребоваться для меньших толщин переходных слоев полей концентрации и скорости, которые будут наблюдаться при более высоких числах Пекле (когда диффузионные переходные слои становятся тоньше), или более низких чисел Кана (поскольку этот параметр задает равновесную толщину границы раздела).

На рисунках 1.5 - 1.10 показаны поля концентрации C , векторные поля скорости возмущений v и полной скорости u , иллюстрирующие развитие неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое. Для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца можно наблюдать развитие вихря в середине области (в середине переходного слоя). Размер вихря и максимальное значение скорости возмущений увеличивается со временем, при этом горизонтальное положение вихря не меняется (см. рис. 1.5 и рис. 1.7). В случае неустойчивости Холмбое можно наблюдать развитие бегущих волн на границе раздела фаз и формирование вихрей движущихся вдоль слоя (см. рис. 1.8 и рис. 1.10). Эти простые различия (являются ли вихри неподвижными или движущимися, и какова форма границы раздела) позволяют различать неустойчивости, а также ассоциировать значения управляющих параметров с определенным видом неустойчивости.

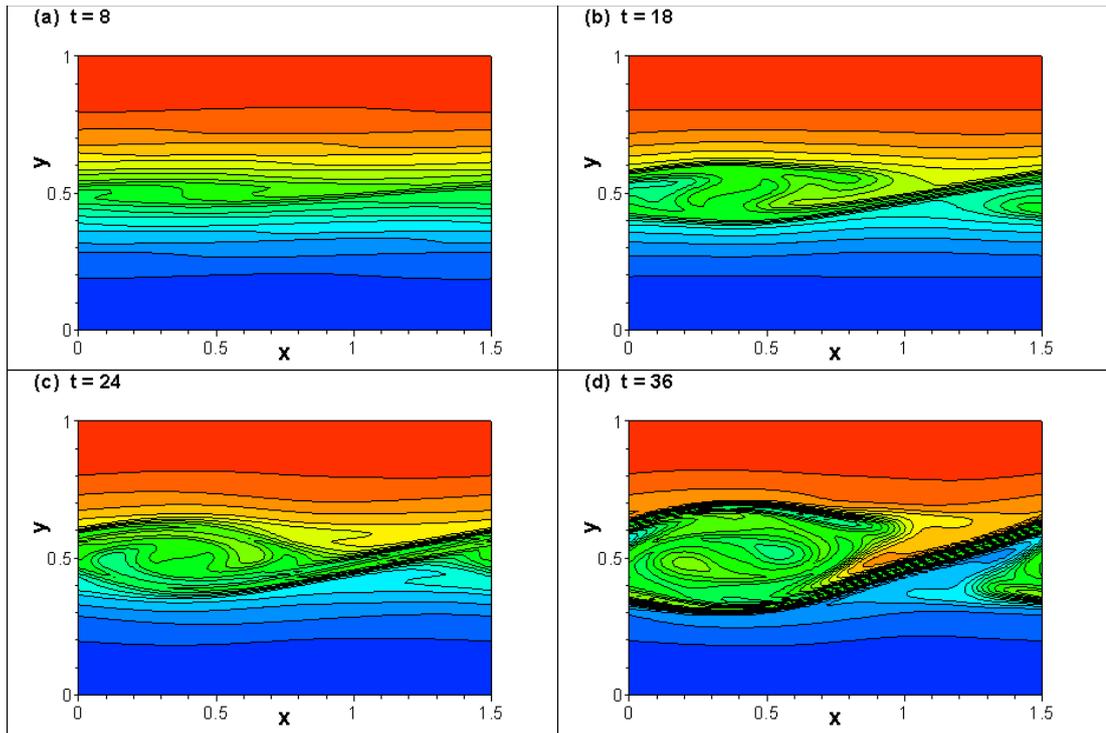


Рис.1.5. Развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Поля концентрации C в различные моменты времени. Данные получены для: $\delta = \delta_U = 0.2$, $U_0 = 1$, $Re = 100$, $Cn = 10^{-3}$, $Pe = 10^6$, $Gr = 0.5$, $k = 4.19$, размер сетки 750×500 узлов.

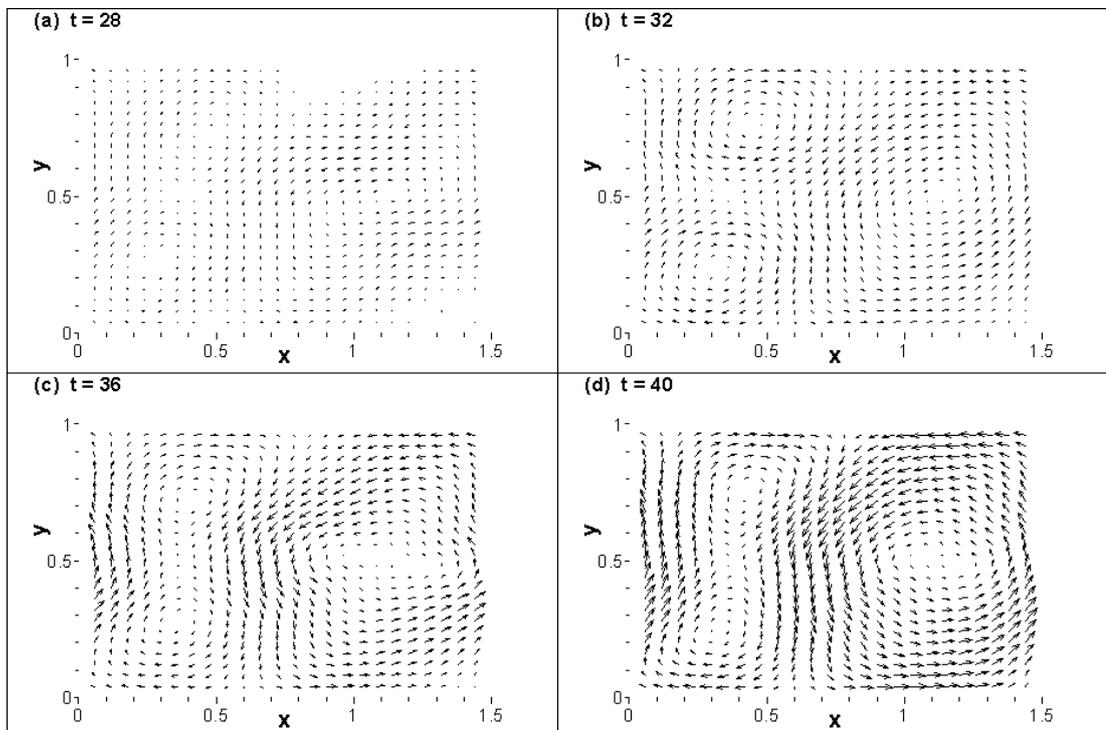


Рис.1.6. Развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Векторные поля скорости возмущений v в различные моменты времени. Для: $\delta = \delta_U = 0.2$, $U_0 = 1$, $Re = 100$, $Cn = 10^{-3}$, $Pe = 10^6$, $Gr = 0.5$, $k = 4.19$, размер сетки 750×500 узлов.

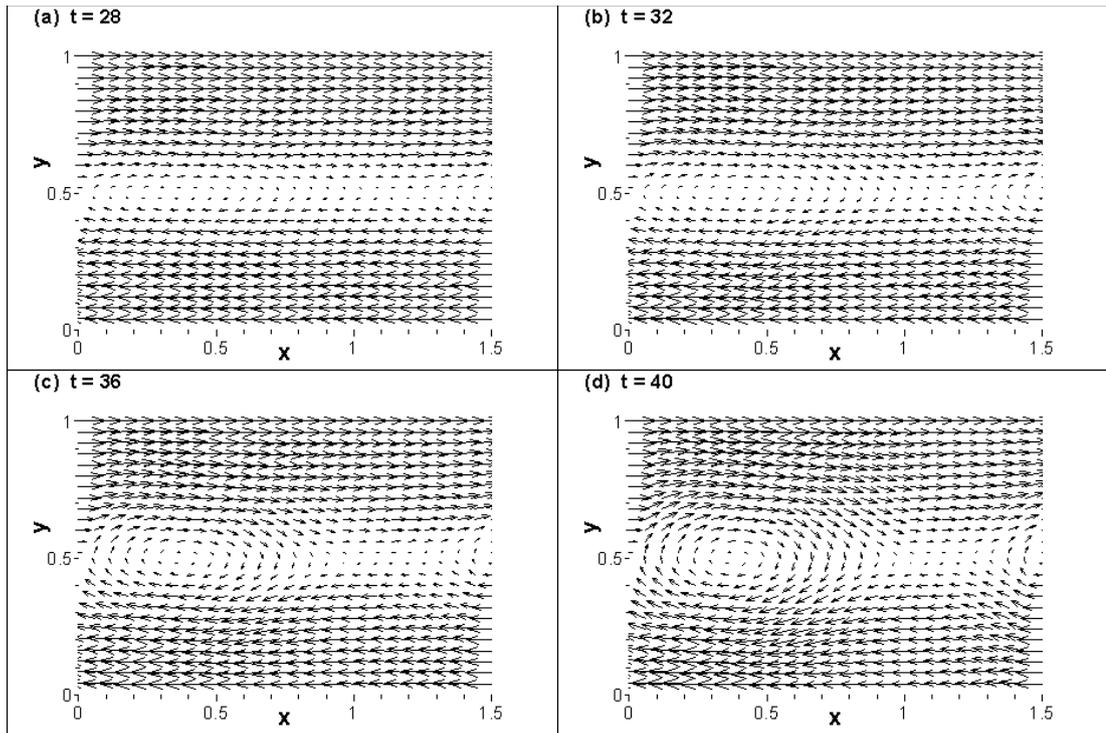


Рис.1.7. Развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Векторные поля полной скорости u в различные моменты времени. Для: $\delta = \delta_U = 0.2$, $U_0 = 1$, $Re = 100$, $Cn = 10^{-3}$, $Pe = 10^6$, $Gr = 0.5$, $k = 4.19$, размер сетки 750×500 узлов.

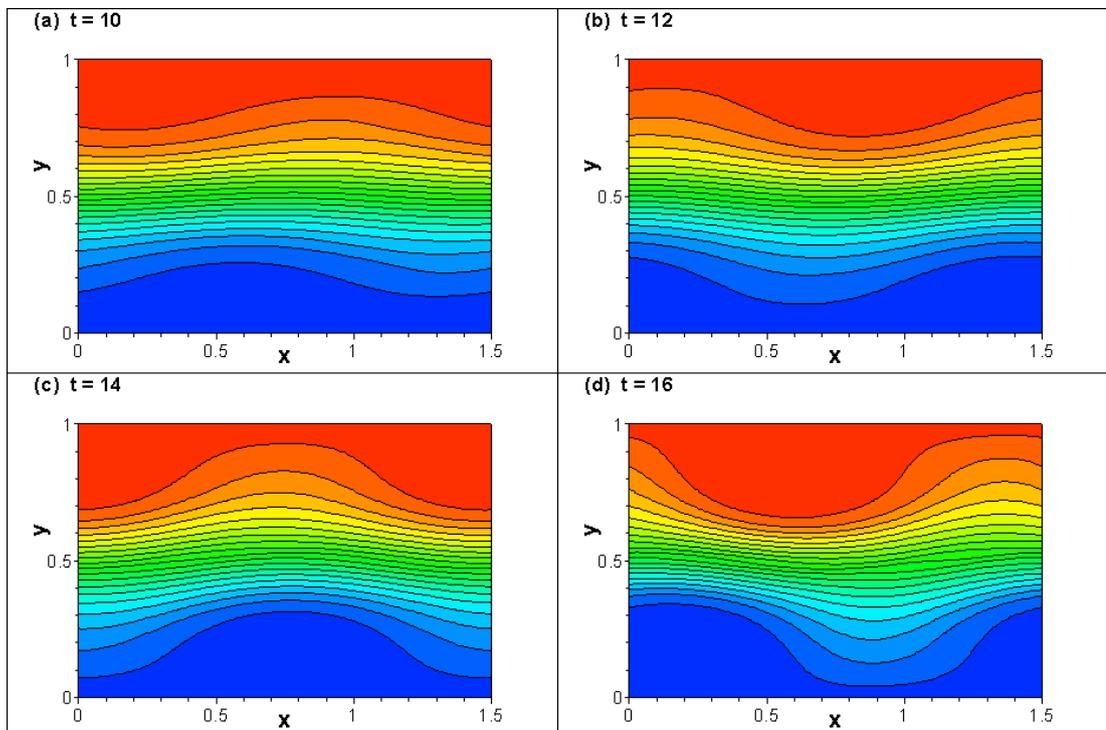


Рис.1.8. Развитие неустойчивости Холмбое. Поля концентрации C в различные моменты времени. Данные получены для: $\delta=0.2$, $\delta_U=0.2$, $U_0 = 1$, $Re = 100$, $Cn = 10^{-3}$, $Pe = 10^6$, $Gr = 10$, $k = 4.19$, размер сетки 750×500 узлов.

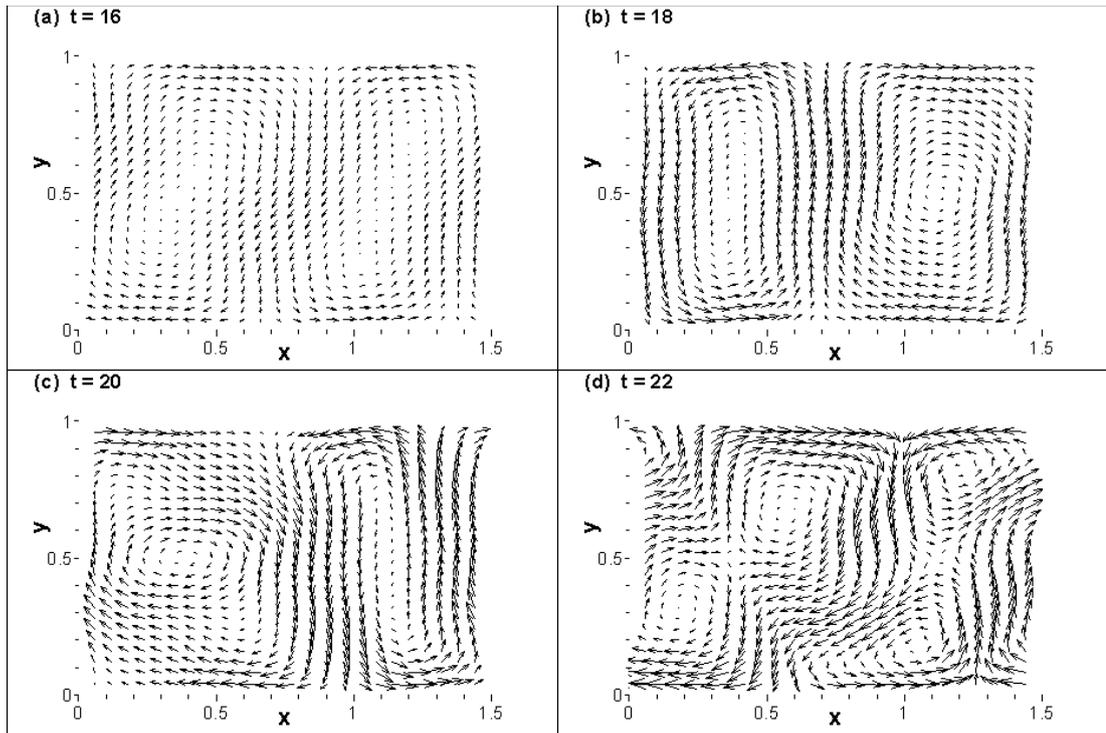


Рис.1.9. Развитие неустойчивости Холмбое. Векторные поля скорости возмущений v в различные моменты времени. Для: $\delta=0.2$, $\delta_U=0.2$, $U_0=1$, $Re=100$, $Cn=10^{-3}$, $Pe=10^6$, $Gr=10$, $k=4.19$, размер сетки 750×500 узлов.

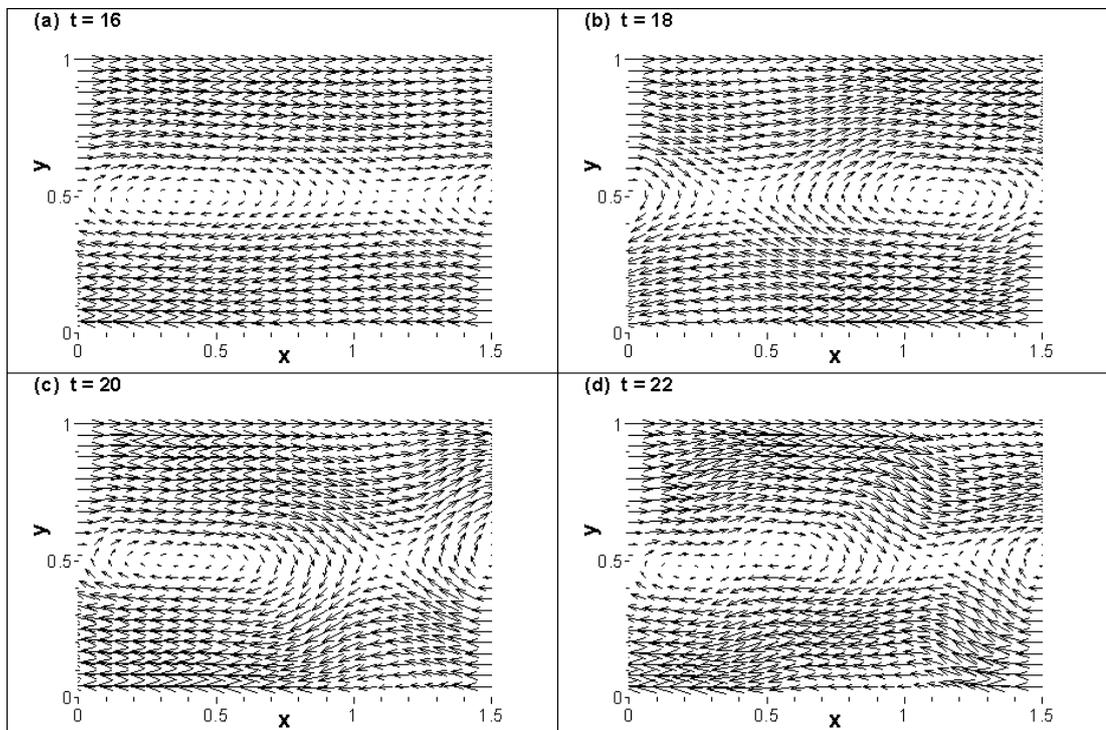


Рис.1.10. Развитие неустойчивости Холмбое. Векторные поля полной скорости u в различные моменты времени. Для: $\delta=0.2$, $\delta_U=0.2$, $U_0=1$, $Re=100$, $Cn=10^{-3}$, $Pe=10^6$, $Gr=10$, $k=4.19$, размер сетки 750×500 узлов.

На рисунке 1.11 представлены диаграммы устойчивости. Рисунок 1.11а заимствован из работы [91], где эта диаграмма получена с помощью линейного анализа устойчивости в приближении замороженного профиля концентрации для границы раздела двух смешивающихся жидкостей, занимающих две полубесконечные области, при: $Pe = \infty$, $Cn = 0$, $Re = \infty$, $U_0 = 1$, $\delta_0 = 0.2$. При числах Грасгофа меньших некоторого значения, реализуется неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, при числах Грасгофа превышающих это значение, доминирует неустойчивость Холмбое. Зона неустойчивости Холмбое велика и незамкнута сверху.

Рисунки 1.11b, 1.11c и 1.11d получены с помощью численного решения полной системы уравнений. Толщина переходного слоя, в котором скорость испытывает скачок, принимается равной: $\delta_U = 0.2$. Толщину профиля концентрации принималась либо равной δ_U (рисунок 1.11c), либо в пять раз меньше, чем δ_U (рисунки 1.11b и 1.11d). В линейной теории устойчивости толщины слоя скачка скорости использовалась как единица длины. Для сравнения результатов, на рисунках 1.11b, 1.11c и 1.11d волновое число и число Грасгофа повторно масштабируются, соответственно $k\delta_U$ и $Gr\delta_U$. Значения остальных параметров также следует масштабировать следующим образом $Re\delta_U$, $Re\delta_U$, и Cn/δ_U^2 .

На рисунке 1.11b приведена карта устойчивости, полученная в нелинейных расчетах, для параметров, близких к соответствующим рисунку 1.11а, полученному в [91] при линейном анализе неустойчивости. В частности, использовались достаточно большие значения $Pe = 10^6$ и $Re = 100$, и достаточно малое значение $Cn = 4 \cdot 10^{-5}$, значения прочих параметров были выбраны равными значениям, соответствующим диаграмме на рисунке 1.11а. Сравнение диаграмм на рисунках 1.11а и 1.11b, и говорить об их качественном и количественном согласии. При этом большое, но все же не бесконечное значение числа Pe приводит к

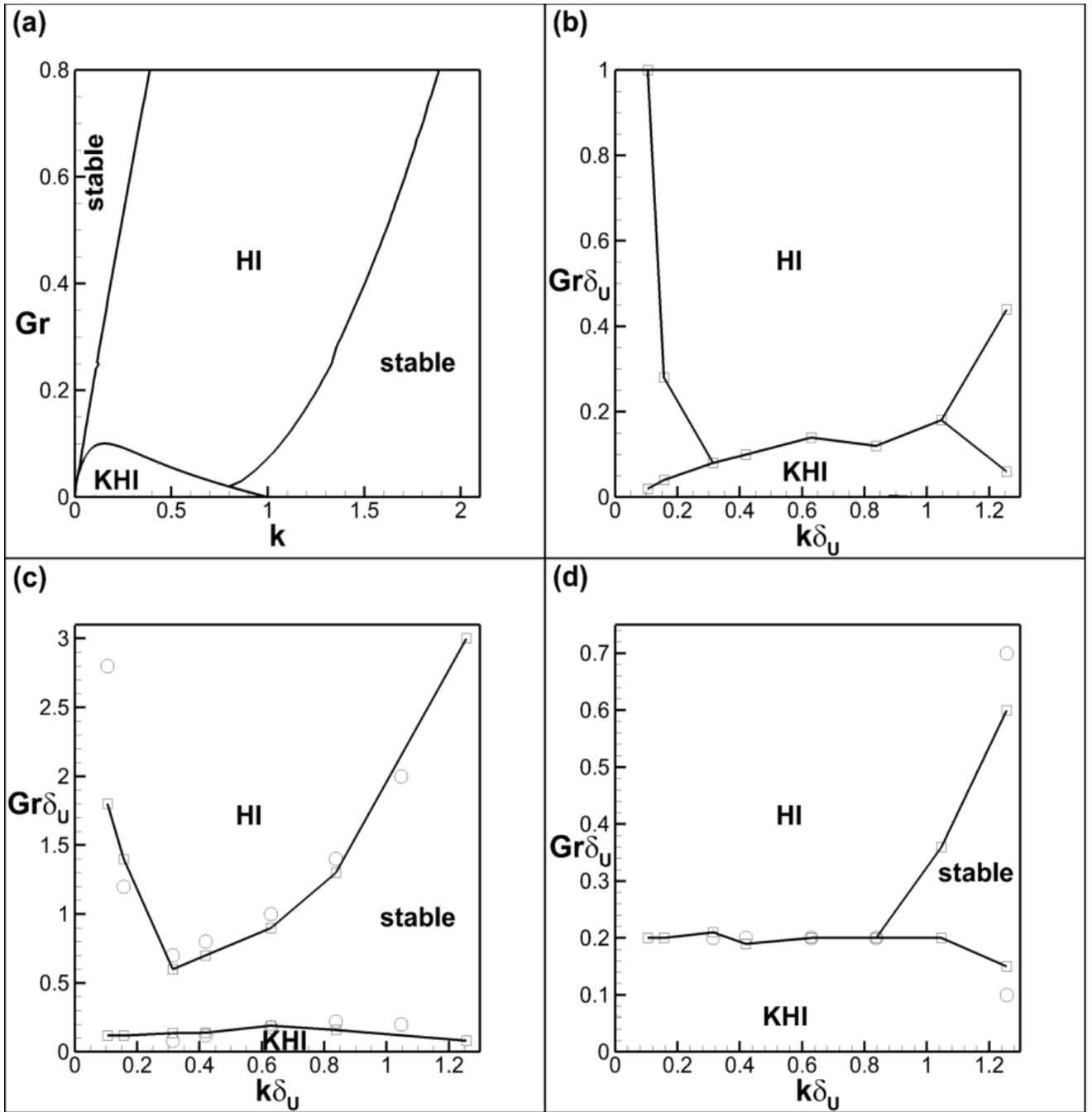


Рис.1.11. Нейтральные кривые определяющие зоны неустойчивостей Кельвина-Гельмольца (отмеченные "КНН") и Холмбое ("НН"). Результаты анализа линейной устойчивости, при $Re = \infty$, $Cn = 0$, $Re = \infty$, $U_0 = 1$, $\delta_0 = 0.2$ (a). Результаты прямого численного моделирования для $Re = 10^6$, $Re = 100$, $U_0 = 1$ и (b): $\delta_0 = 0.04$, $\delta_U = 0.2$, $Cn = 4 \cdot 10^{-5}$; (c): $\delta_0 = \delta_U = 0.2$, $Cn = 10^{-3}$; (d): $\delta_0 = 0.04$, $\delta_U = 0.2$, $Cn = 10^{-3}$. Квадраты соответствуют моделированию методом фазового поля, а окружности - точкам, полученным с помощью классического подхода.

усилению эффектов диффузии, что расширяет интервал волновых чисел, при которых наблюдаются неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Холмбое.

На рисунке 1.11с изображена карта устойчивости для следующих параметров: $Pe = 10^6$, $Re = 100$, $U_0 = 1$, $\delta_0 = \delta_U = 0.2$, $Cn = 10^{-3}$. Значения Cn и δ_0 увеличились по сравнению с параметрами использованными, при вычислениях, результаты которых приведены на рисунке 1.11b, что соответствует увеличению толщины границы раздела и усилению поверхностных эффектов на этой границе. Видно, что наблюдается эффект стабилизации неустойчивости Холмбое, в результате чего на рисунке 1.11с можно идентифицировать не наблюдавшееся в линейном приближении новое поведение. Зоны неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое оказываются разделены зоной устойчивого сдвигового потока: при более низких числах Грасгофа сдвиговой поток неустойчив по отношению к неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, при высоких числах Грасгофа по отношению к неустойчивости Холмбое, а в промежуточном диапазоне чисел Грасгофа сдвиговой поток устойчив. Отметим, что при линейном анализе [91] толщина границы раздела всегда принималась меньшей толщины слоя скачка скорости, что является общепринятым допущением для этих параметров: фазовая граница обычно очень тонкая (и, часто, может составлять только несколько молекулярных слоев), однако, толщина границы раздела может быть и больше, например, вблизи критической точки, когда может быть реализовано поведение, изображенное на рисунке 1.11с.

На рисунке 1.11d изображена карта устойчивости для следующих параметров: $Pe = 10^6$, $Re = 100$, $U_0 = 1$, $\delta_0 = 0.04$, $\delta_U = 0.2$, $Cn = 10^{-3}$. Начальная ширина слоя скачка концентрации уменьшилась по сравнению со значением, соответствующим рисунку 1.11с. Для этого набора параметров не удалось найти зону устойчивости слева, при этом зона неустойчивости Холмбое по волновому числу расширилась. Таким образом, уменьшение начальной толщины границы раздела (по сравнению с рисунком 1.11с), приводит к увеличению зоны неустойчивости Холмбое, как по волновому числу, так и по числу Грасгофа.

На рисунках 1.11c и 1.11d также приведены точки, полученные с помощью классического подхода, который полностью игнорирует силы поверхностного натяжения и моделирует процесс диффузии с использованием классического закона Фика (поток диффузии пропорционален градиенту концентрации). В классическом подходе нет различных фаз, а вместо этого изучается эволюция однофазной двухкомпонентной жидкости. Управляющие уравнения для классического подхода записываются следующим образом

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \Pi + \frac{1}{\text{Re}_c} \nabla^2 \vec{u} - \text{Gr}_c C \vec{\gamma}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) C = \frac{1}{\text{Pe}_c} \nabla^2 C, \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (22)$$

Эти уравнения включают в себя три безразмерных параметра: число Пекле, число Рейнольдса и число Грасгофа

$$\text{Pe}_c = \frac{L_* u_*}{D}, \text{Re}_c = \frac{\rho_* u_* L_*}{\eta_*}, \text{Gr} = \frac{\varphi g L_*}{u_*^2} \quad (23)$$

Из рисунков 1.11c и 1.11d видно, что большинство точек, полученных с помощью классического подхода, лежат очень близко к результатам полученным методом фазового поля. Это можно объяснить тем, что в диссертационной работе изучаются сильно диффузионные границы раздела, силы поверхностного натяжения остаются низкими (коэффициент поверхностного натяжения обратно пропорционален толщине границы раздела [48,91]). Классический и фазово-полевой подходы основаны на различных законах диффузии, но эти различия остаются несущественными для определения границ гидродинамических неустойчивостей, так как исследования, проведенные в рамках обоих подходов, основаны на относительно коротких численных реализациях, когда диффузионный перенос остается слабым (изменения средних концентраций в пределах каждой фазы невелики).

В численных расчетах определялись интегральные характеристики течения:

- кинетическая энергия возмущений по выражению (19);
- длина границы раздела, L (положение границы раздела определяется уровнем концентрации $C = 0$. Чтобы определить длину границы L , сначала ищутся узлы, между которыми концентрация меняет свой знак, и определяется положение границы раздела между этими узлами с помощью линейной интерполяции; затем вычисляется длина элемента границы, который лежит в ячейке, окруженной четырьмя узлами; и, наконец, суммируются длины этих элементов, чтобы получить длину всей межфазной линии);
- толщина границы раздела δ с использованием формулы $\delta = V_\delta/L$ (здесь V_δ - объем переходной зоны, которая определяется как зона в вычислительной области с уровнями концентрации в диапазоне, $|C| \leq 0.2$);
- коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = E_i/L$ (здесь E_i - межфазная энергия, которая рассчитывается как $E_i = Cn \int_V (\nabla C)^2 dV$);
- средние концентрации в каждой фазе, C_1 и C_2 (фазы определяются знаком концентрации; средняя концентрация в части расчетной области с положительными концентрациями обозначается как C_1 , и средняя концентрация в другой части вычислительной области равна C_2).

На рисунке 1.12 показана временная эволюция интегральных характеристик, для различных значений числа Грасгофа, когда развиваются неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (сплошные линии, $Gr=0.5$) и Холмбое (пунктирные линии, $Gr=10$). Кривые демонстрируют явные различия в поведении интегральных характеристик для этих двух неустойчивостей.

Для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца кинетическая энергия возмущения (имеющего форму единого стационарного вихря) монотонно растет со

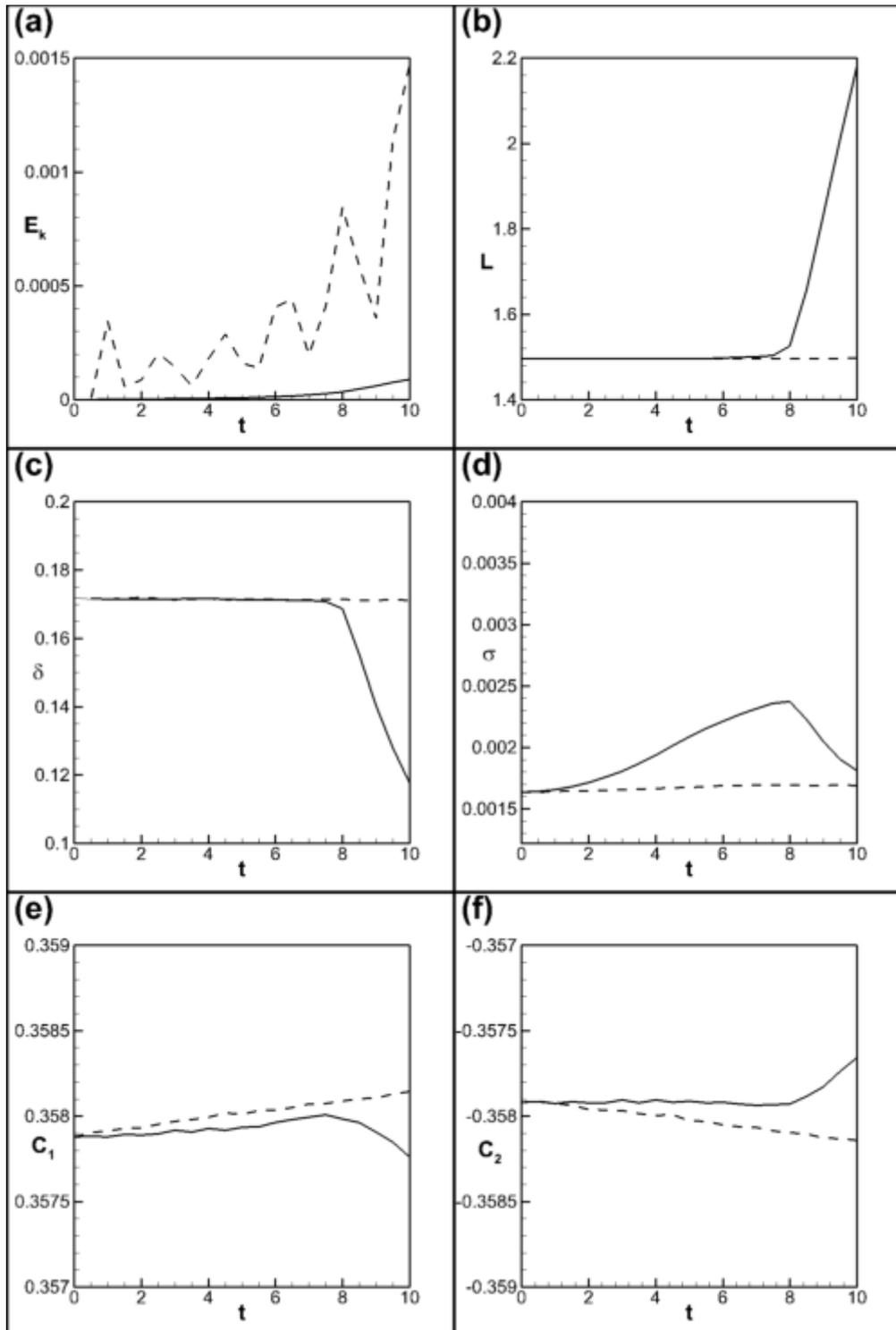


Рис.1.12. Общая кинетическая энергия (а), толщина границы раздела фаз (b), длина границы раздела фаз (с), коэффициент поверхностного натяжения (d) и средние концентрации в каждой фазе в зависимости от времени (e,f). Данные получены для: $\delta = \delta_U = 0.2$, $U_0 = 1$, $Re = 100$, $Cn = 10^{-3}$, $Pe = 10^6$, $k = 4.19$, $Gr = 0.5$ (сплошная линия) и $Gr = 10$ (пунктирная линия).

временем. Для случая неустойчивости Холмбое наблюдается колебательный рост кинетической энергии, что объясняется наличием движущихся вихрей. Действительно, на рисунке 1.8 видно, что поля скоростей в расчетной области существенно различаются в разные моменты времени, и это объясняет сильные различия в значениях кинетической энергии.

Как было указано выше, положение границы раздела определяется уровнем концентрации $C = 0$, изображенным центральной изолинией на рисунках 1.5 и 1.6. Для диффузионных границ раздела, рассмотренных в диссертационной работе, это определение не очень точно. Тем не менее, из рисунка 1.5 видно, что центральная изолиния сильно деформируется вихрем Кельвина-Гельмгольца, что объясняет наблюдаемый рост длины границы раздела L на рисунке 1.12b (сплошная линия). На рисунке 1.6, в случае неустойчивости Холмбое, длина центральной изолинии остается практически неизменной, что подтверждается формой штриховой линии на рисунке 1.12b.

На рисунке 1.12c показано изменение во времени толщины границы раздела. Межфазные напряжения характеризуются коэффициентом поверхностного натяжения, зависимость которого от времени показана на рисунке 1.12d. Видно, что для неустойчивости Холмбое коэффициент поверхностного натяжения остается постоянным, а для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на начальном этапе растет. Наконец, из рисунков 1.12e и 1.12f следует, что неустойчивость Кельвина-Гельмгольца приводит к большему усилению молекулярного смешения через границу жидкость/жидкость.

Были также выполнены численные расчеты для различных значений параметров U_0 , Pe , Sp . Установлено, что увеличение скачка скорости сдвигового течения ускоряет развитие неустойчивости. Более низкие числа Пекле означают более сильные эффекты диффузии, и неустойчивость развивается медленнее. Увеличение числа Кана повышает влияние поверхностного натяжения, что делает границу раздела менее подверженной деформациям, а это уменьшает амплитуду

волн и интенсивность движения в системе. Аналогичные выводы ранее были сделаны с помощью анализа линейной устойчивости [91].

1.2.4. Выводы по разделу 1.2

Изучена эволюция изотермической гетерогенной смеси двух медленно смешивающихся жидкостей с более тяжелой жидкостью внизу, в горизонтальном плоском слое при наличии сдвигового течения вдоль смешиваемой границы раздела. Впервые с помощью прямого численного моделирования исследованы возникновение и развитие неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Холмбое. Найдено, что развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца сопровождается образованием вихря в середине переходного слоя, положение вихря не меняется со временем, кинетическая энергия движения монотонно растет со временем. Развитие неустойчивости Холмбое связано с формированием бегущих волн на границе раздела жидкостей. В этом случае наблюдается колебательный рост кинетической энергии.

Получены диаграммы устойчивости для нескольких наборов управляющих параметров. Подтверждены результаты линейной теории устойчивости, полученные в приближении замороженного профиля концентрации. Для слабых поверхностных эффектов (при малых числах Кана) результаты качественно и количественно соответствуют результатам линейного анализа.

Впервые обнаружено, что усиление поверхностных эффектов (повышение числа Кана) приводит к появлению области устойчивости между областями неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Холмбое, что связано со стабилизацией неустойчивости Холмбое.

Выполнено моделирование в рамках классического подхода, моделирующего бинарную смесь как однофазную среду с примесью. Проведено сравнение численных результатов, полученных на основании этого и фазово-полевого подходов.

1.3. Моделирование подъема капли методом фазового поля

1.3.1. Введение

В диссертационной работе моделируется подъем капли жидкости в сосуде, заполненном другой жидкостью, за счет сил плавучести. Предполагается, что жидкости являются медленно смешивающимися. Действительно, коэффициенты диффузии в жидкостях относительно малы $D \sim 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, так что полное растворение даже достаточно маленькой капли должно занять некоторое время (капля с радиусом $a_0 \sim 10^{-3} \text{ м}$ растворилась бы за время $a_0^2/D \sim 10^3 \text{ с}$). В течение этого времени различия в плотностях двух жидкостей, приведенных в контакт, будут вовлекать каплю в гидродинамическое движение, которое и является объектом исследования диссертационной работы.

Движение капли в другой жидкости, смешивающихся с первой, за счет сил плавучести представляет большой теоретический и практический интерес, который, в частности, мотивируется важностью сил поверхностного натяжения в эволюции формы и движения капли. Имеется много свидетельств того, что границы раздела смешиваемых жидкостей должны иметь некоторое небольшое динамическое поверхностное натяжение, которое может, однако исчезнуть, когда система достигает состояния термодинамического равновесия [40,90]. Такой вывод можно сделать из наблюдений таких процессов, как растворение капельки меда в чае: капелька меда, как правило, имеет сферическую форму, а сферическая форма может быть объяснена только действием сил поверхностного натяжения.

Значения коэффициентов поверхностного натяжения экспериментально измерены для большого количества систем смешивающихся жидкостей (см., например, [47,92-95]), с типично очень низкими, но отличными от нуля, значениями (как правило, порядка $\sigma \sim 10^{-5} \text{ Н/м}$). Исследование динамического поверхностного натяжения можно найти в работе [96]. Измерения значений коэффициента поверхностного натяжения с большой точностью и правильное применение концепции динамического поверхностного натяжения являются актуальными для исследования.

В [97] проведено экспериментальное исследование, направленное на измерение коэффициента поверхностного натяжения в системе глицерин-вода с использованием методики тензиометрии вращающихся капель. Сделан вывод о том, что для корректного описания динамики смешиваемой капли во вращающемся тензиометре не требуется использование поверхностного натяжения. Но, основываясь на анализе устойчивости, авторы [98] продемонстрировали, что силы поверхностного натяжения необходимы для того, чтобы, поднимаясь, капля оставалась сферической, так как в противном случае сферическая форма капли неустойчива по отношению к малым возмущениям, которые в конечном итоге приводят к диспергированию капли в окружающей жидкости. Кроме того, на основе качественного сравнения теоретических и экспериментальных результатов в [98] сделан вывод о возможном наличии небольшого, зависящего от времени, межфазного натяжения на поверхности капли.

Позднее устойчивость движущейся капли была изучена другими исследователями, в том числе в [99] и [100]: анализ, выполненный для медленно поднимающейся несмешиваемой капли, показал, что поверхностное натяжение способно подавлять рост малых возмущений, однако возмущения с достаточно большой амплитудой могут нарастать.

В диссертационной работе проведено прямое численное исследование процесса всплытия капли в жидкости смешиваемой с первой, с целью понять, когда движущаяся капля может остаться целой, не разрушаясь и не растворяясь в окружающей жидкости.

Численное исследование проводится с использованием двух альтернативных подходов. Во-первых, используется классическое (традиционное) представление для смешивающихся жидкостей, при этом моделируется гидродинамическая эволюция системы двух жидкостей на основе уравнений однофазной бинарной жидкой смеси. В рамках этого подхода для того, чтобы различать компоненты смеси вводится поле концентрации, и для отслеживания временных изменений в системе решаются гидродинамические уравнения с добавлением уравнения переноса примеси. Граница раздела представляется в виде

диффузной границы с нулевым поверхностным натяжением. Второй подход — это моделирование с помощью метода фазового поля, который учитывает эффекты поверхностного натяжения даже тогда, когда исследуется динамика систем смешивающихся жидкостей.

Теоретический подход, используемый в настоящем исследовании ранее применялся для моделирования динамики капли в другой жидкости смешивающейся с первой во вращающемся капельном тензиометре [43], развития неустойчивости Релея-Тейлора, Кельвина-Гельмгольца и Холмбое на диффузных границах раздела [2,45], вытеснения одной жидкости другой в капиллярной трубке [101], развитие стоячих волн на диффузной границе раздела [39,46] и др.

Метод фазового поля был также использован для моделирования всплывания включений в системах несмешивающихся жидкостей [102,103]. В исследовании [44] в центре внимания подъем смешиваемого включения, было рассмотрено влияние межфазной диффузией на движение капли. Изучен подъем около-сферических капель, которые медленно теряют вещество из-за межфазной диффузии.

Цель исследований, содержащихся в настоящем разделе диссертационной работы, заключается в определении влияния сил поверхностного натяжения на форму всплывающей капли, что является важным для понимания динамики капель с малыми коэффициентами поверхностного натяжения, когда капли скорее рассеиваются на более мелкие капельки, нежели поднимаются целиком.

1.3.2. Постановка задачи

Моделируется подъем небольшой одиночной капли в сосуде, заполненном другой жидкостью, за счет плавучести. Предполагается, что сосуд имеет форму цилиндра кругового поперечного сечения. Для уменьшения влияния боковой стенки сосуда на поведение капли, предполагается, что радиус капли значительно меньше, чем радиус сосуда. Кроме того, рассматривается достаточно высокий цилиндр, который позволяет пренебрегать влиянием нижней и верхней границ на динамику капли.

Задача решается в осесимметричной постановке. Используется цилиндрическая система координат, радиальная и осевая координаты обозначаются через r и z соответственно.

Используются уравнения.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \frac{\Pi}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u} - \frac{1}{M} C \nabla \mu, \quad (24)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) C = \frac{1}{Sc} \Delta \mu, \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (26)$$

$$\mu = GrM(\vec{r} \cdot \vec{\gamma}) + 2AC + 4C^3 - Cn\Delta C. \quad (27)$$

Уравнения (24-27) дополняются следующими граничными условиями. На нижней стенке контейнера

$$z = 0: u_r = u_z = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \quad (28)$$

На верхней стенке

$$z = H: u_r = u_z = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \quad (29)$$

На оси

$$r = 0: u_r = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0. \quad (30)$$

На боковой стенке

$$r = 1: u_r = u_z = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0. \quad (31)$$

Предполагается, что в начальный момент капля, как и окружающая её жидкость, неподвижны. Капля имеет сферическую форму и расположена на осевой линии с начальной координатой z_0 . Таким образом, начальные скорость и поле концентрации задаются следующими выражениями

$$\vec{u}_0 = 0, \quad C_0 = \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\sqrt{r + (z - z_0)^2} - r_0}{\delta_0} \right) \quad (32)$$

Расчеты проводились для: начального положение капли $z_0 = 0.5$, начального радиуса капли $r_0 = 0.1$, и начальной толщины границы раздела $\delta_0 = 0.014$ (что является равновесной толщиной для $A = -0.5$ и $Sn = 10^{-4}$).

Граничные условия (28-31) используются в случае применения метода фазового поля. Уравнения фазового поля имеют более высокий (четвертый) порядок, и они требуют одно дополнительное условие для поля концентрации. Чтобы исключить диффузионный поток через границы, задается граничное условие на химический потенциал, и второе условие на концентрацию, определяющее свойства смачивания на стенках. Исследуется динамика капельки вдали от стенок, что позволяет принимать условие нейтрального смачивания, когда линия контакта ортогональна к стенке.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \Pi + \Delta \vec{u} - Gr \vec{\gamma} \quad (33)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) C = \frac{1}{Sc} \Delta C \quad (34)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (35)$$

Граничные условия для классического подхода формулируются точно так же, с той лишь разницей, что эти уравнения не включают химический потенциал, а значит и условия для него не нужны (невозможно задать свойства смачивания в классической модели, а условия для концентрации будут отражать отсутствие диффузии через стенку).

1.3.3. Численный метод

Уравнения решаются в терминах функции тока и завихренности с применением конечно-разностного подхода. Используется аппроксимация второго порядка по пространственным переменным и первого порядка по времени. Уравнение для функции тока решается итерационным методом Гаусса-Зейделя. Используется равномерная по пространству сетка. Решение производится по явной схеме с постоянным шагом по времени.

На рисунке 1.13 представлены численные результаты, полученные при использовании различных сеток. Можно видеть сходимость результатов. Из этих тестовых расчетов можно сделать вывод, что сетка с разрешением 450×2700 узлов достаточна, чтобы получить удовлетворительные по точности результаты. Требования к размеру сетки более строги для подхода фазового поля и становятся особенно строгими для малых значений параметра M , низких чисел Кана и высоких чисел Грасгофа.

Все расчеты выполнены для высоты вычислительной области $L = 6$, в качестве единицы длины выбран радиус области R . Предварительные расчеты показали, что выбранной высоты сосуда вполне достаточно для почти сферической капли, чтобы достичь состояния подъема с постоянной скоростью. Найдено, что до тех пор, пока капля не приблизится близко к верхней стенке ($z > 5.5$) влияние верхней стенки на движение капли остается незначительным.

1.3.4. Оценка параметров

Проведем оценки значений безразмерных параметров. В опытах [90] и [98] исследуются кукурузный сироп, смеси глицерина с водой и смеси сиропа с глицерином. Эти смеси характеризуются большими перепадами вязкости. Наш интерес, однако, мотивирован экспериментами с разбавленными смесями на водной основе, аналогично тем, которые используются в работе [104], когда физические параметры компонентов смеси очень близки друг к другу.

Таким образом, для оценок можно взять плотность и вязкость воды, и значение коэффициента диффузии, типичного для смеси на водной основе

$$\rho_1 \sim 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \eta \sim 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad D \sim 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}. \quad (36)$$

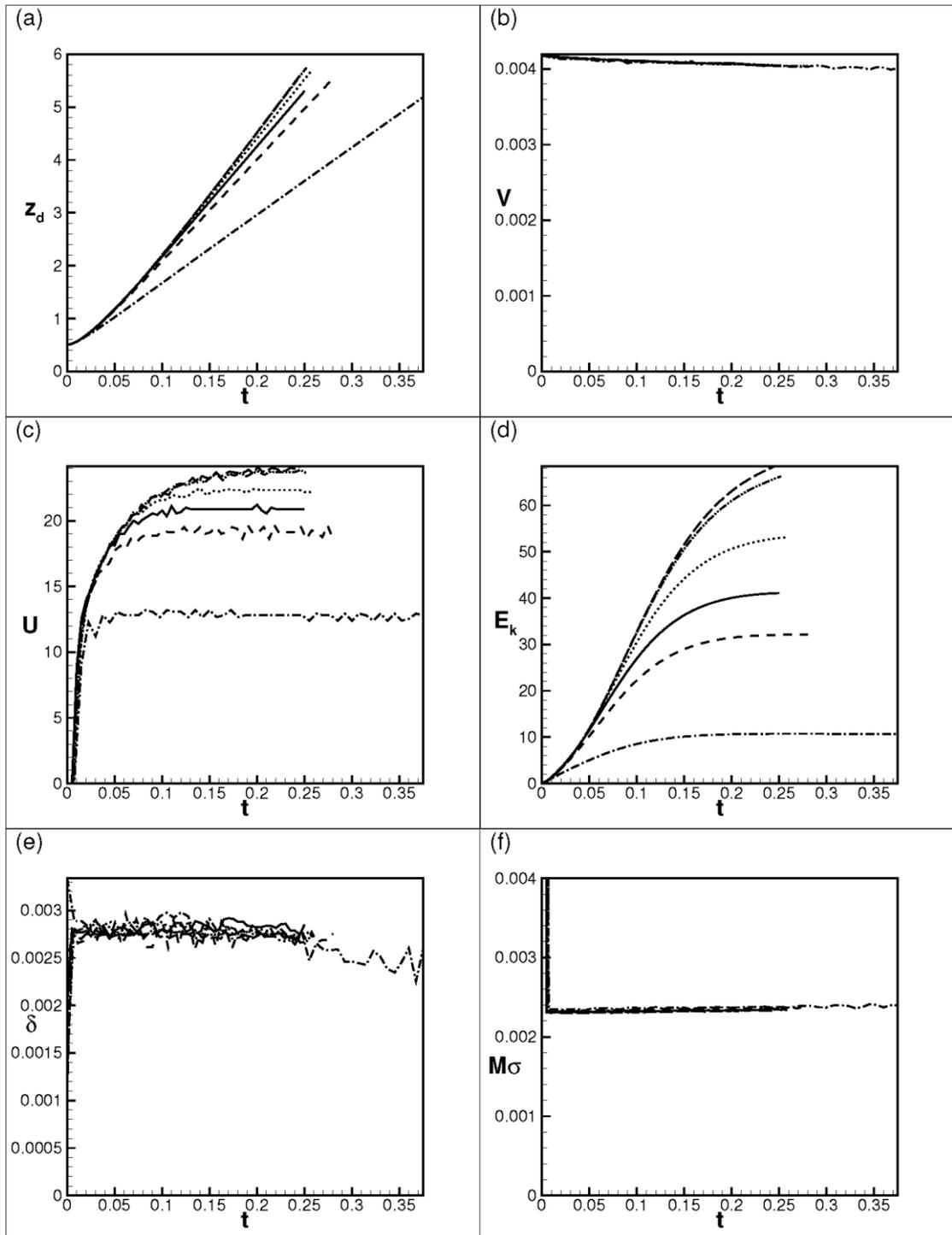


Рис.1.13. Вертикальная координата капли (а), объем капли (b), скорость капли (с), кинетическая энергия смеси в расчетной области (d), толщина межфазной границы (е) и коэффициент поверхностного натяжения (f), рассчитанные с использованием различных числовых сеток: 250×1500 – точка-тире, 350×2100 - штрихи, 450×2700 - сплошная, 550×3300 - пунктир, 650×3900 – точка-точка-тире, 750×4500 - длинные штрихи. Результаты приведены для $Gr = 10^4$, $Sc = 10^3$, $M = 10^{-7}$, $A = -0,5$ и $Cn = 10^{-4}$.

Два наиболее значимых параметра, которые позволяют менять число Грасгофа — это концентрация примеси (она определяет относительную разность плотностей $\varphi = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_*}$) и характерный масштаб длины L_* . Будем считать, что начальный радиус всплывающей капли невелик, $a_0 \sim 10^{-3}$ м, размер контейнера, который был выбран в качестве единицы длины, в десять раз больше $R = L_* \sim 10^{-2}$ м. Также предполагалось более низкое чем в экспериментах значение перепада плотности $\varphi \sim 10^{-3}$. В этом случае типичные значения безразмерных параметров для классической модели: чисел Шмидта и Грасгофа, имеют порядок

$$Sc \sim 10^3, Gr \sim 10^4. \quad (37)$$

Выбранный размер капли и особенно перепад плотностей, на самом деле, слишком малы для экспериментальной работы. Данная оценка числа Грасгофа скорее устанавливает нижнюю границу числа Грасгофа для динамики разбавленных бинарных смесей на водной основе. Для других смесей, например, с более вязкими компонентами, такими как капли воды в смеси глицерина и воды или сиропе (см. [90]), значения числа Грасгофа могут быть ниже.

Одной из трудностей моделирования фазового поля является вовлечение неклассических феноменологических параметров α , μ_* и ε . В диссертационной работе, для моделирования эволюции смеси в рамках подхода фазового поля, принимаются такие же значения чисел Грасгофа и Шмидта, как и в классическом подходе.

Значение числа Кана в первую очередь определяется капиллярной константой ε . Число Кана, в частности, определяет толщину равновесной границы раздела $\delta_{eq} = \sqrt{-Cn/A}$. В диссертационной работе основные расчеты выполнены для $Cn = 10^{-4}$, при этом межфазная граница достаточно тонкая, значительно меньше, чем размер капли, но численное разрешение такой границы остается выполнимым.

Значение параметра M определяет величину силы Кортвега, характеризующей эффекты поверхностного натяжения. В диссертационной работе

были выполнены расчеты для различных значений M для того, чтобы выявить роль капиллярных сил в динамике капли.

Термодинамические свойства смеси определяются параметром A . Рассматриваемая бинарная смесь имеет фазовую диаграмму с верхней критической точкой, которая определена значением $A = 0$: если A положительно, то смесь однородна в равновесии, и если A отрицательно, то смесь может быть либо однородна, либо гетерогенна, исходя из общего баланса масс (для рассматриваемой проблемы, однако, вследствие того, что капелька является небольшой по сравнению с размером контейнера, состояние термодинамического равновесия будет всегда однородным, за исключением $A = -0.5$ когда межфазная диффузия почти равна нулю, так как начальные концентрации компонентов смеси уже соответствуют равновесным уровням насыщения). Расчеты были выполнены для нескольких значений параметра A .

Приведем также характерные значения скорости и времени, а также коэффициента поверхностного натяжения, что будет необходимо для анализа полученных результатов

$$u_* \sim 10^{-4} \text{ м/с}, \quad \tau_* \sim 10^2 \text{ с}, \quad \sigma_* = \rho_1 u_*^2 L_* \sim 10^{-7} \text{ Н/м}. \quad (38)$$

Движение включения в окружающей жидкости характеризуется также числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho_* u_* a_0}{\eta_*}. \quad (39)$$

Для выбранных значений параметров число Рейнольдса $Re \sim 0.1$.

1.3.5 Численные результаты

1.3.5.1 Классический подход

На рисунке 1.14 показаны поля скорости поднимающейся капли, полученные с использованием классического подхода, при значениях параметров, указанных в подписи к рисунку. Расчеты показали, что капля практически растворяется к $t \approx 1$. К моменту своего растворения капля проходит относительно короткий путь (~ 3 см в размерных единицах). Число Шмидта для этого расчета является достаточно высоким, что соответствует очень большой величине диффузионного времени $\tau_d \sim Sc = 1000$, и таким образом, видимое исчезновение капли следует в первую очередь объяснять ее диспергированием (распределением по вычислительной области), за счет конвективного движения.

Уплотнение капли во время ее подъема (и образования кольца) напоминает экспериментальные наблюдения, о которых сообщалось в [90] и [98]. Начальная динамика капли, в том числе движение окружающей жидкости позади капли, также согласуются с результатами моделирования, представленными в [99] и [100].

Было также выполнено моделирование при различных значениях числа Грасгофа. Расчеты показали, что при более высоких числах Грасгофа диспергирование капли происходит еще быстрее (см. рисунок 1.15). При $Gr = 10^3$ (см. рисунок 1.16) подъем капли происходит гораздо медленнее, но, из-за того, что капля дольше сохраняет свою целостность, ей удается пройти большее расстояние до момента полного растворения. При таких числах Грасгофа течения, вызванные движением капли в окружающей жидкости, недостаточно интенсивны, чтобы разбить эту каплю. При более высоких числах Грасгофа скорости в вихрях, образующихся возле капли, сравнимы или даже больше, чем скорость всплытия капли (особенно потому, что уплотнение формы капли существенно замедляет её подъем), в отличие от более низких чисел Грасгофа. При низких значениях числа Грасгофа, форма капли эволюционирует, формируя хвост на задней кромке капли, что соответствует результатам моделирования в [99] и [100]. Расчеты, выполненные при еще более низких числах Грасгофа (см. рисунок 1.17), показывают, что при этих значениях влияние диффузии становится более заметным, таким образом, динамику капли можно скорее описать как диффузное

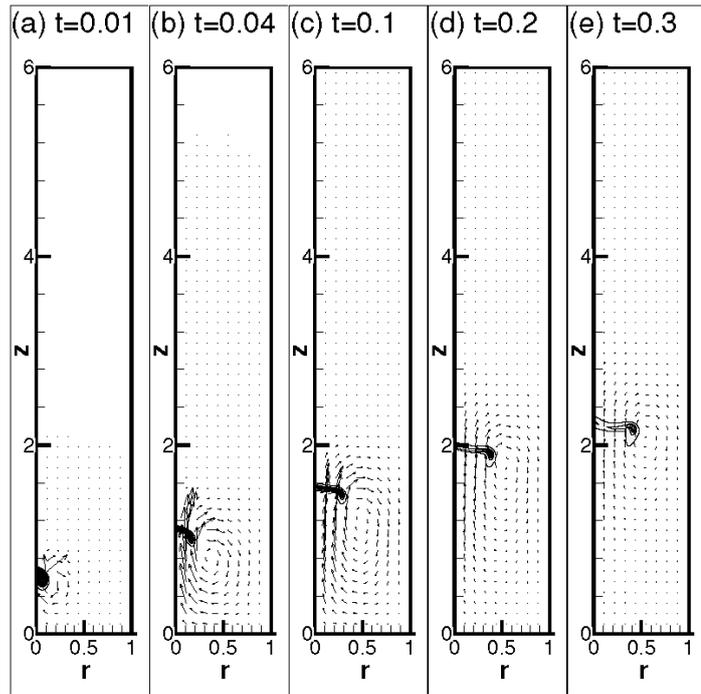


Рис.1.14. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием классического подхода, для $Gr = 10^4$ и $Sc=10^3$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0.01$ (a), $t = 0.04$ (b), $t = 0.1$ (c), $t = 0.2$ (d) и $t = 0.3$ (e).

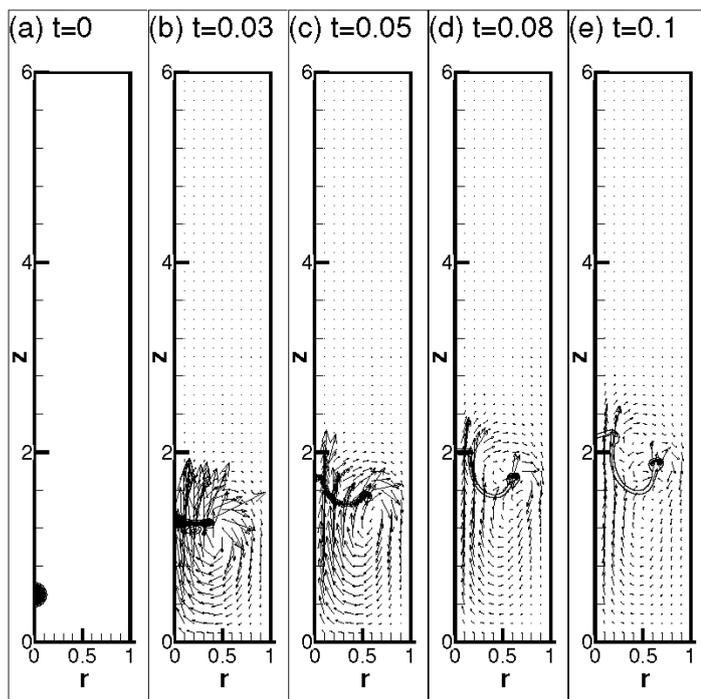


Рис.1.15. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием классического подхода, для $Gr = 10^5$ и $Sc=10^3$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0$ (a), $t = 0.03$ (b), $t = 0.05$ (c), $t = 0.08$ (d) и $t = 0.1$ (e).

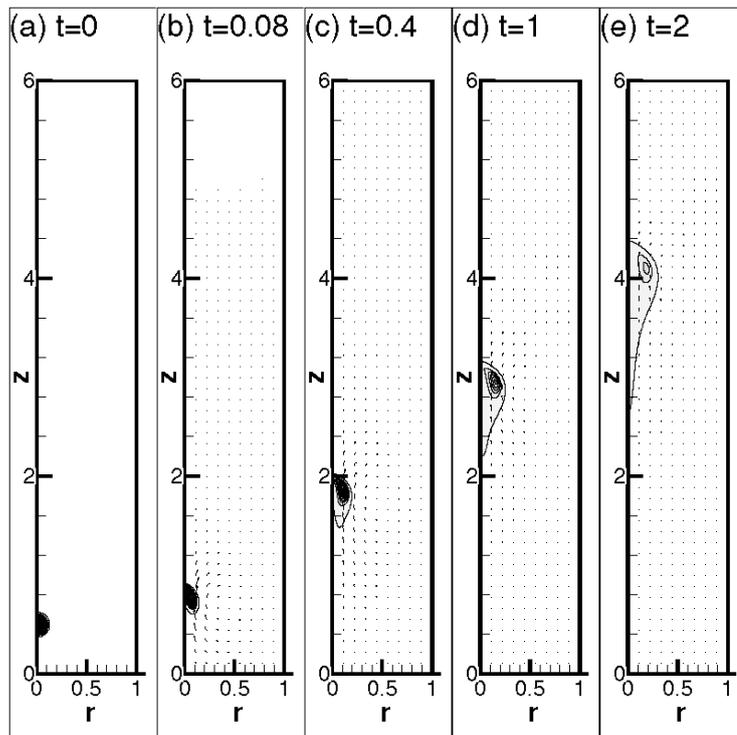


Рис.1.16. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием классического подхода, для $Gr = 10^3$ и $Sc=10^3$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0$ (a), $t = 0.08$ (b), $t = 0.4$ (c), $t = 1$ (d) и $t = 2$ (e).

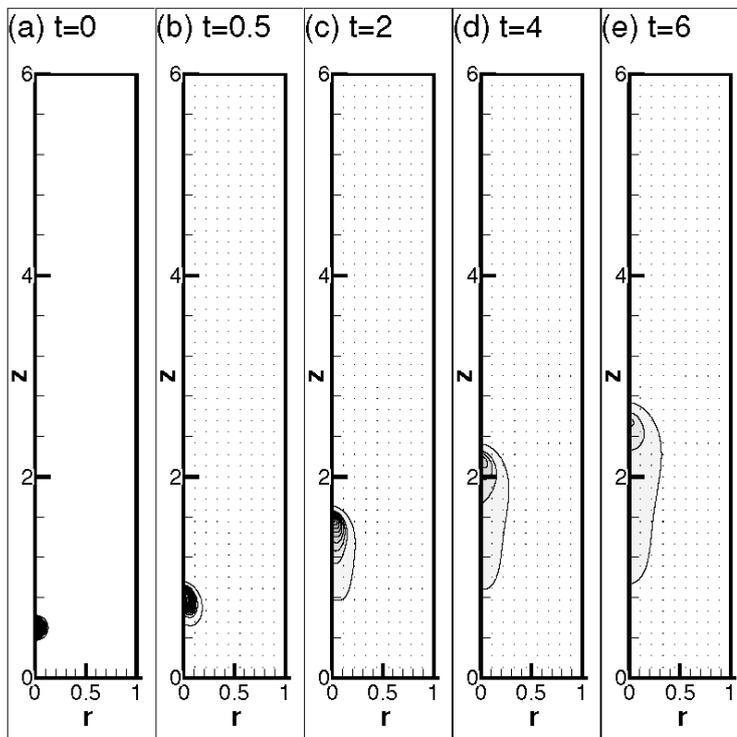


Рис.1.17. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием классического подхода, для $Gr = 10^2$ и $Sc=10^3$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0$ (a), $t = 0.5$ (b), $t = 2$ (c), $t = 4$ (d) и $t = 6$ (e).

растворение вместо гидродинамического движения с дисперсией. При моделировании в работах [99] и [100] эффекты диффузии на границе раздела не учитывались, и в них не была обнаружена аналогичная диффузионно-управляемая эволюция формы капли.

На некоторых экспериментальных изображениях, например, на представленных в работе [90], отчетливо видны продолжительные периоды подъема капель, во время которых капли остаются почти сферическими. Кроме того, авторы отмечают, что «капля, как представляется, хочет принять сферическую форму даже и особенно в момент инъекции». Расчеты, проведенные в рамках диссертационной работы, позволяют сделать вывод о том, что смешиваемые капли, которые, как сообщается в [98–100], абсолютно неустойчивы, могут, на самом деле, подниматься цельными (без сильных деформаций), но только если они поднимаются довольно медленно, при достаточно низких числах Грасгофа. Поскольку классическая теория полностью пренебрегает эффектами поверхностного натяжения, с ее помощью невозможно объяснить экспериментальные наблюдения, когда смешиваемая капля «принимает форму сферы».

1.3.5.2. Метод фазового поля

На рисунке 1.18 показаны поля скорости для поднимающейся капли, моделируемой на основе фазово-полевого подхода. Можно видеть, что поверхностное натяжение на границе раздела, сохраняет форму капли сферической во время подъема. Благодаря более низкому сопротивлению, сферическая капля поднимается быстрее.

На рисунке 1.19 показаны интегральные характеристики всплывающей капли для трех различных значений параметра M (различные уровни сил поверхностного натяжения): на рисунке 1.19a - вертикальная координата центра масс капли в зависимости от времени, на рисунке 1.19b - объем капли. Толстая штриховая линия

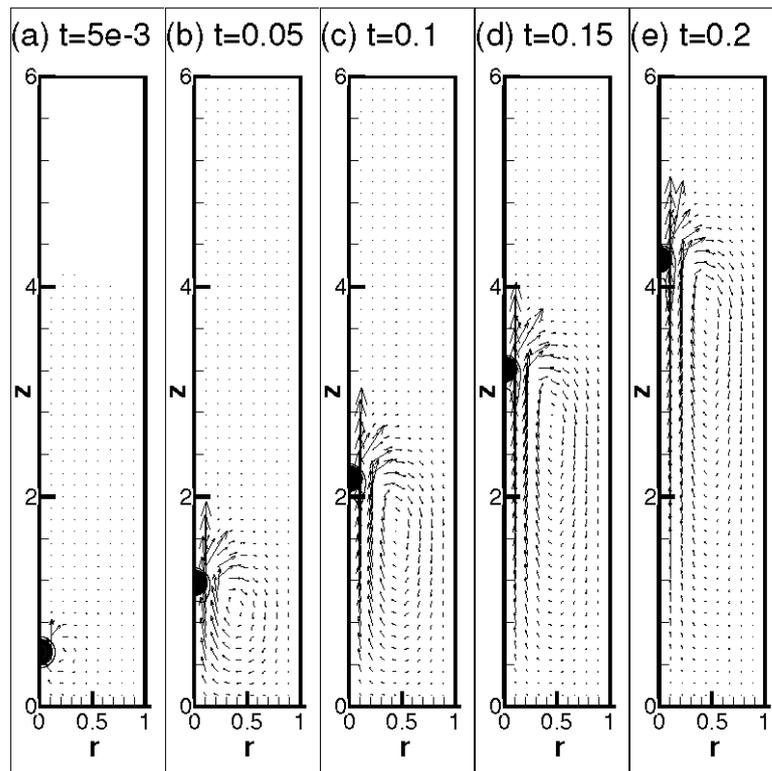


Рис.1.18. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием метода фазового поля, для $Gr = 10^4$, $Sc=10^3$, $A = -0.5$, $Cn = 10^{-4}$ и $M = 10^{-7}$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0.005$ (a), $t = 0.05$ (b), $t = 0.1$ (c), $t = 0.15$ (d) и $t = 0.2$ (e).

показывает предельное значение, соответствующее сферической капле радиусом 0.1. Объем капли с границами, наделенными более сильным поверхностным натяжением, остаётся почти постоянным на протяжении всего подъема. При более низких значениях поверхностного натяжения межфазная диффузия становится отличной от нуля, что приводит к небольшому уменьшению объема капли.

По истечении начального периода капля переходит к подъему с постоянной скоростью. В предельном случае медленно поднимающейся сферической капли конечная скорость определяется по закону Адамара-Рыбчинского [105]

$$U_{\infty} = \frac{4}{15K_1} Gr \cdot r_0^2 \quad (40)$$

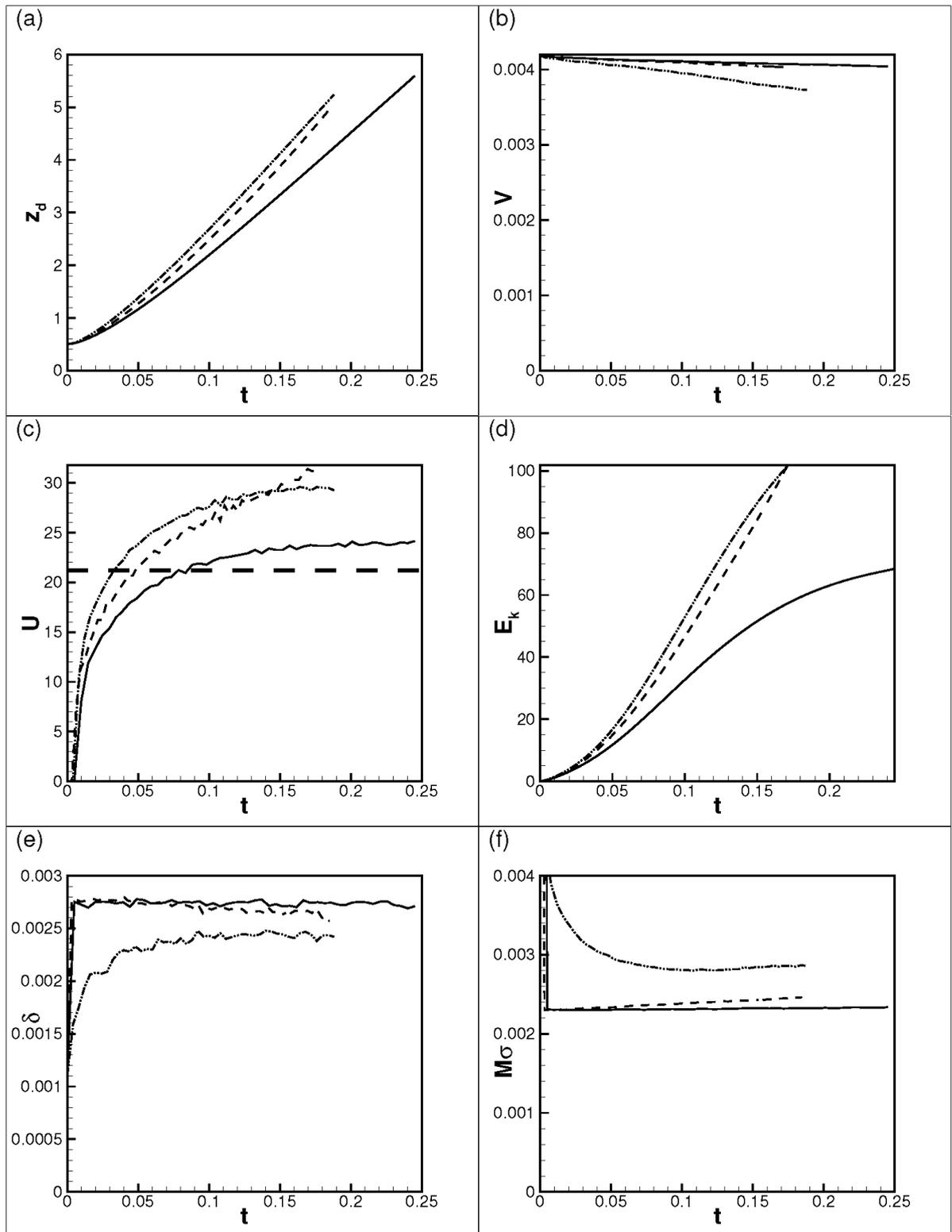


Рис.1.19. Вертикальная координата капли (а), объем капли (б), скорость капли (с), кинетическая энергия смеси в расчетной области (д), толщина межфазной границы (е) и коэффициент поверхностного натяжения (ф). Результаты приведены для $Gr = 10^4$, $Sc = 10^3$, $A = -0.5$, $Cn = 10^{-4}$ и $M = 10^{-5}$ (точка-точка-тире), $M = 10^{-6}$ (штриховая), $M = 10^{-7}$ (сплошная).

Это выражение записано в предположении, что жидкость капли и окружающая жидкость имеют одинаковые значения коэффициента вязкости. Поправочный коэффициент K_1 учитывает то, что капля поднимается в трубке кругового сечения (т.е. он учитывает влияние стенок сосуда на скорость капли [106]). Для капли радиуса $r_0 = 0.1$ поправочный коэффициент $K_1 = 1.26$ дает значение скорости $U_\infty = 21.2$ (~2мм/с в размерных единицах). Из рисунка 1.19с видно, что при малых значениях параметра M , полученная в расчетах скорость капли близка к значению, предсказанному по формуле (40).

Поднимаясь, капля вовлекает в движение жидкость во всей вычислительной области. Интенсивность этого движения характеризуется полной кинетической энергией $E_k = \frac{1}{2} \int_V u^2 dV$, которая приведена на рисунке 1.19d. Кинетическая энергия, определяемая с использованием формулы $VU_\infty^2/2 \approx 0.942$, значительно меньше, чем уровень результирующей кинетической энергии показанный на рисунке 1.19d, это указывает на то, что на самом деле значительная часть окружающей жидкости является вовлеченной в гидродинамическое движение.

На рисунке 1.19е показана толщина переходного слоя, рассчитанная как толщина зоны, для которой $|C| \leq 0.05$. Рисунок 1.19f показывает значение коэффициента поверхностного натяжения. И то, и другое, толщина переходного слоя и связанный с ней коэффициент поверхностного натяжения остаются практически неизменными на всем протяжении подъема капли. Учитывая оценки (38), размерное значение коэффициента поверхностного натяжения может быть оценено для $M = 10^{-7}$ как $\sigma_{\text{dim}} \sim 10\text{Н/м}$, а для $M = 10^{-5}$ как $\sigma_{\text{dim}} \sim 0.1\text{Н/м}$.

Результаты, показанные на рисунках 1.18 и 1.19, демонстрируют поведение капли, граница раздела которой наделена очень сильным (в действительности нефизическим) поверхностным натяжением, когда капля остается сферической (ведет себя как твердая частица). Вызывает интерес динамика капли с более низкими значениями коэффициента поверхностного натяжения, т.е. с более высокими значениями параметра M .

Такие результаты показаны на рисунках 1.20-1.21, как видно для $M = 10^{-6}$ и $M = 10^{-5}$ (см., например, рисунок 1.20), нет никаких качественных различий в численных результатах: капля продолжает подниматься, сохраняя почти сферическую форму. Можно только отметить, что скорость движения капли становится немного выше (см. рисунок 1.19с). В работе [44] показано, что включения, смешивающиеся с окружающим объемом жидкости, поднимаются быстрее, чем они поднялись бы в несмешивающейся жидкости. Этот эффект объясняется действием силы Кортвега, аналогичной действию силы Марангони, которая влияет на подъем пузырьков при наличии поверхностно-активных веществ (см., например, [107] и [108]). При $M = 10^{-4}$ (это соответствует коэффициенту поверхностного натяжения порядка $\sigma_{\text{dim}} \sim 0.01 \text{Н/м}$, что является типичным значением для границы раздела несмешивающихся жидкостей), капля деформируется приобретая форму кольца (см. рисунок 1.21). Более сильная деформация формы капли также приводит к замедлению движения капли. При $M = 10^{-3}$ ($\sigma_{\text{dim}} \sim 10^{-3} \text{Н/м}$), динамика капли, изображенной на рисунке 1.22, уже напоминает динамику, демонстрируемую каплей без поверхностного натяжения (см. рисунок 1.14). При еще более низких значениях параметра M (см. рисунок 1.23 для $M = 10^{-1}$ это соответствует $\sigma_{\text{dim}} \sim 10^{-5} \text{Н/м}$, т. е. порядок, обычно предполагаемый для смешиваемых границ раздела) поля скорости, которые характеризуют подъем капли, качественно воспроизводят результаты, показанные на рисунке 1.14. Разница в полях скорости наблюдается только вблизи дна и верхней стенки контейнера, где результаты моделирования методом фазового поля показывают развитие гравитационной стратификации в поле концентрации.

Все результаты, представленные выше, получены для значения $A = -0.5$. Для принятой термодинамической модели это значение A соответствует случаю несмешивающихся жидкостей, когда начальное состояние смеси совпадает с термодинамическим состоянием равновесия. Численные результаты показывают, что для того, чтобы полностью исключить диффузию, необходимо устремить параметр M к нулю. При более высоких значениях параметра M , межфазная

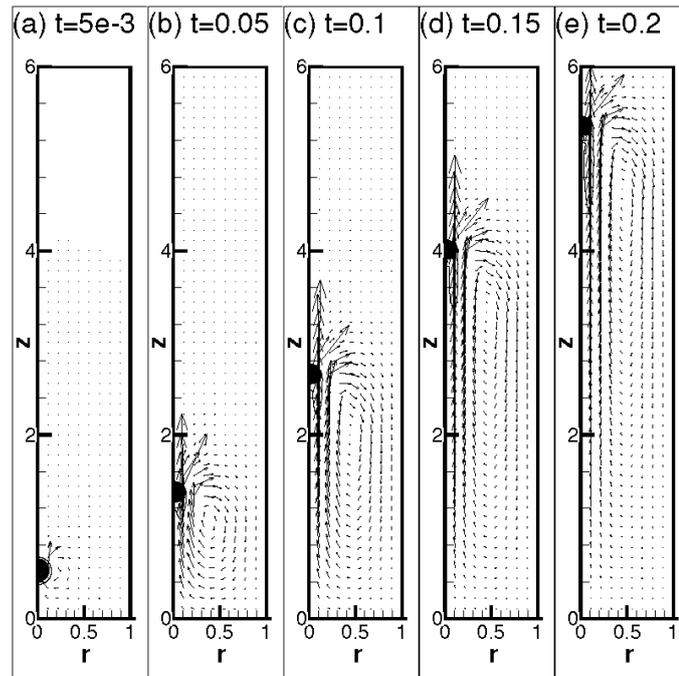


Рис.1.20. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием метода фазового поля, для $Gr = 10^4$, $Sc=10^3$, $A=-0.5$, $Cn=10^{-4}$ и $M=10^{-5}$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0.005$ (a), $t = 0.05$ (b), $t = 0.1$ (c), $t = 0.15$ (d) и $t = 0.2$ (e).

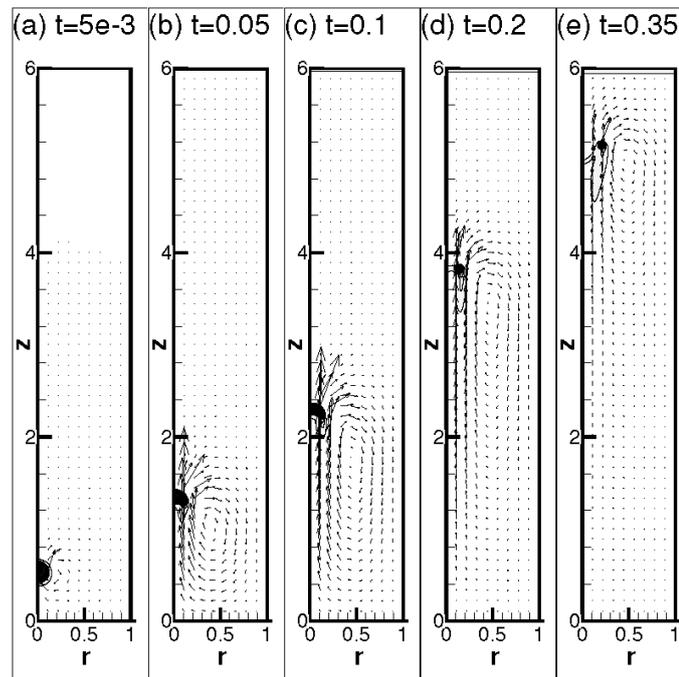


Рис.1.21. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием метода фазового поля, для $Gr = 10^4$, $Sc=10^3$, $A=-0.5$, $Cn=10^{-4}$ и $M=10^{-4}$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0.005$ (a), $t = 0.05$ (b), $t = 0.1$ (c), $t = 0.2$ (d) и $t = 0.35$ (e).

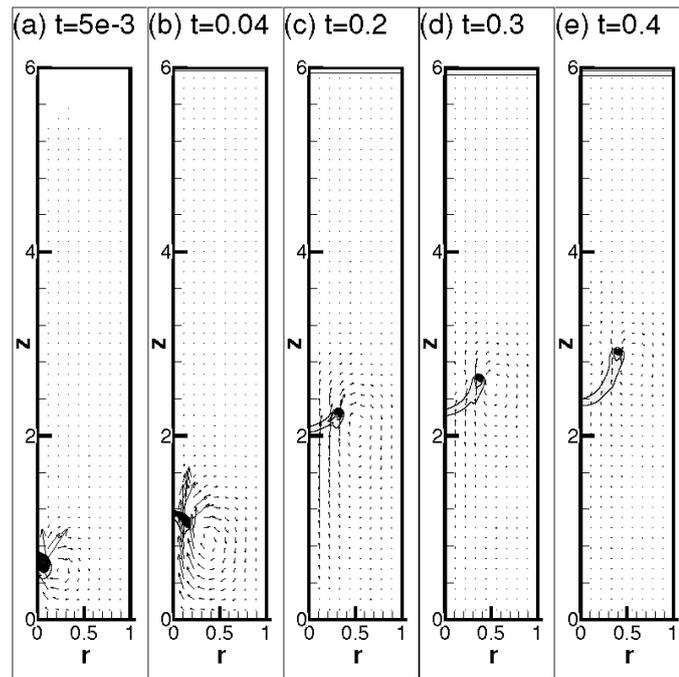


Рис.1.22. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием метода фазового поля, для $Gr = 10^4$, $Sc=10^3$, $A=-0.5$, $Cn=10^{-4}$ и $M=10^{-3}$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0.005$ (a), $t = 0.04$ (b), $t = 0.2$ (c), $t = 0.3$ (d) и $t = 0.4$ (e).

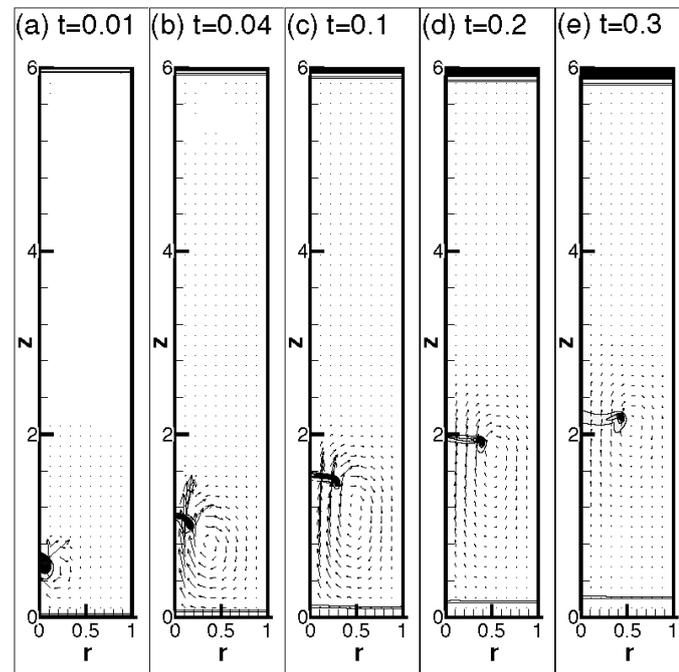


Рис.1.23. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием метода фазового поля, для $Gr = 10^4$, $Sc=10^3$, $A=-0.5$, $Cn=10^{-4}$ и $M=10^{-1}$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0.01$ (a), $t = 0.04$ (b), $t = 0.1$ (c), $t = 0.2$ (d) и $t = 0.3$ (e).

диффузия низка, но все еще отлична от нуля, что объясняет незначительные изменения объема капли (см. рисунок 1.19b).

На рисунке 1.24 показаны результаты, полученные для различных значений параметра A . При $A > -0.5$ уменьшение размера капли благодаря межфазной диффузии становится более значительным. Уменьшение капли приводит к замедлению ее подъема (так как скорость подъема пропорциональна квадрату радиуса капли, см. уравнение (34)). Кроме того, все расчеты проведены для одного и того же начального состояния, которое соответствует одинаковой начальной толщине границы раздела. На рисунке 1.24e изображено изменение со временем толщины межфазной границы. Можно заметить, что толщина переходного слоя постепенно растет. Она должна расти до тех пор, пока не будет достигнуто равновесное значение (для $A < 0$ равновесная толщина границы раздела определяется как $\sqrt{-Cn/A}$) или неограниченно (для $A > 0$ состояние термодинамического равновесия всегда гомогенно). Зависимость от времени коэффициента поверхностного натяжения (показана на рисунке 1.24f) коррелирует изменению толщины границы раздела со временем.

Изменение величины поверхностного натяжения за период, который прослеживается в данных расчетах, относительно невелико. Для $M = 10^{-7}$, не обнаружено качественных различий в динамике капли в расчетах, выполненных с различными A (чтобы заметить существенные изменения требуются расчеты для гораздо более длинного сосуда и гораздо более долгого подъема капли). Хотя, для более низких значений параметра M , когда траектория движения капли остается ограниченной размером моделируемого контейнера, расчеты для разных A уже дают заметно различающиеся результаты. Например, на рисунке 1.25 показаны поля скорости для поднимающейся капли, полученные для $M = 10^{-4}$, они аналогичны показанным на рисунке 1.21, но для $A = 0.5$. Начальная динамика капель для этих двух расчетов практически идентична, но, когда изменение поверхностного натяжения становится значительным ($t > 0.1$), поведение капель

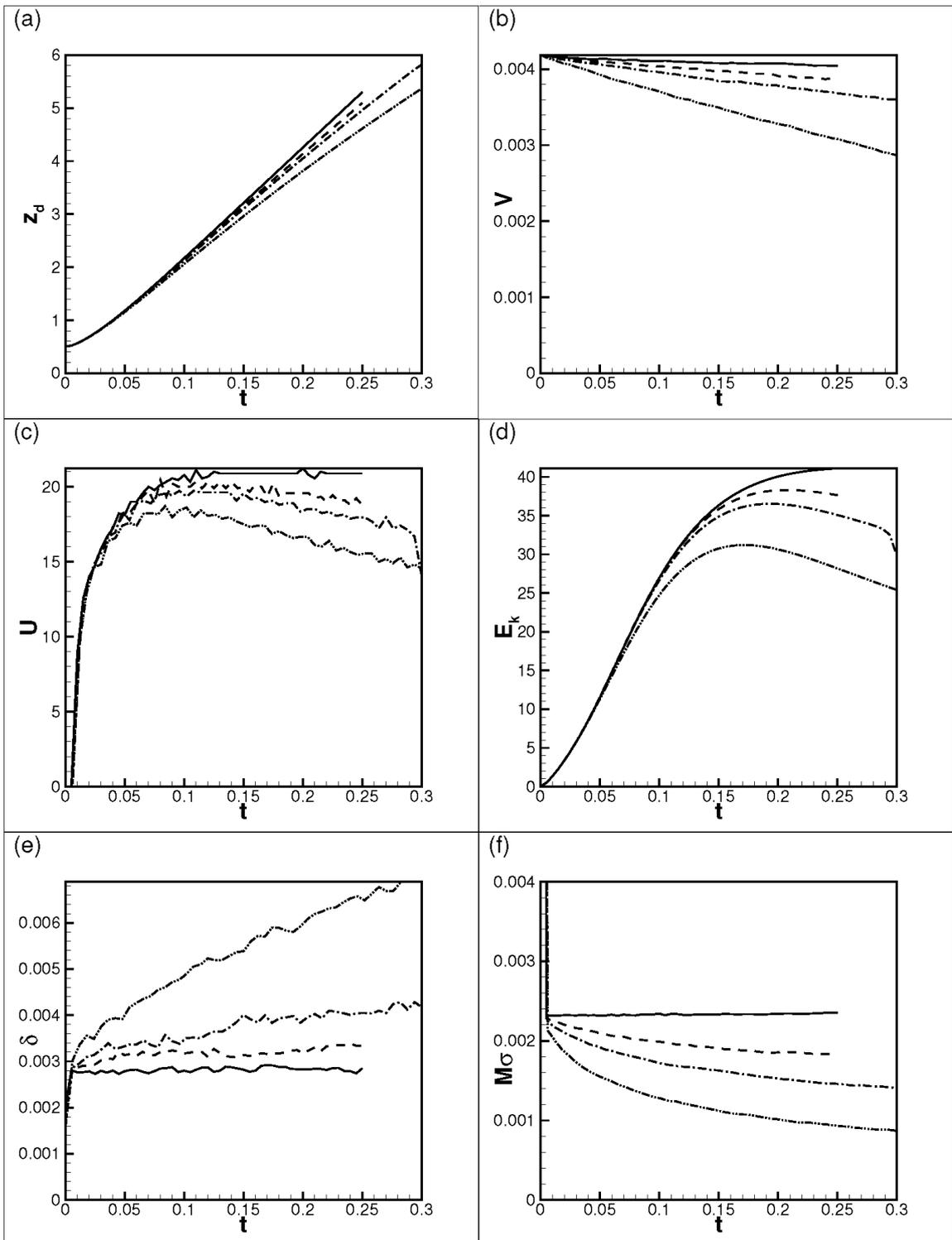


Рис.1.24. Вертикальная координата капли (а), объем капли (b), скорость капли (с), кинетическая энергия смеси в расчетной области (d), толщина межфазной границы (е) и коэффициент поверхностного натяжения (f). Результаты приведены для $Gr = 10^4$, $Sc = 10^3$, $M = 10^{-7}$, $Cn = 10^{-4}$ и $A = -0.5$ (сплошная), $A = -0.3$ (штриховая), $A = -0.1$ (штрих-пунктир), $A = 0.5$ (точка-точка-тире).

заметно различается. При более высоких температурах (более высокие значения A) капля становится более сплюсненной, что замедляет её подъем, при этом скорость межфазной диффузии также увеличивается.

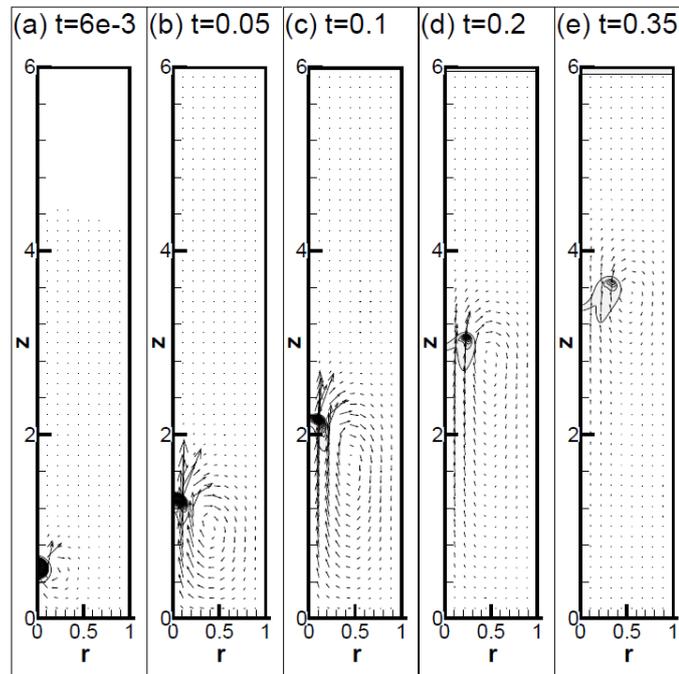


Рис.1.25. Поля концентрации и скорости. Результаты получены с использованием метода фазового поля, для $Gr = 10^4$, $Sc=10^3$, $A=0.5$, $Cn=10^{-4}$ и $M=10^{-4}$. Поля показаны для моментов времени, $t = 0.006$ (a), $t = 0.05$ (b), $t = 0.1$ (c), $t = 0.2$ (d) и $t = 0.35$ (e).

1.3.6. Выводы по разделу 1.3

В рамках теории фазового поля, выполнено прямое численное моделирование подъема капли, погруженной в другую жидкость, смешивающейся с первой, за счет сил плавучести. Результаты моделирования согласуются с предшествующими численными исследованиями движения несмешивающихся капель с достаточно малыми значениями коэффициента поверхностного натяжения. При достаточно низких скоростях подъема капли, наблюдающихся при малых числах Грасгофа (малых разностей плотности капли и окружающей жидкости), форма поднимающейся капли напоминает сферу, такая капля не

распадается на части до ее растворения. Для сравнения также было проведено моделирование в рамках классического подхода, с пренебрежением эффектами поверхностного натяжения.

Впервые обнаружено, что для очень высоких (нефизических) значений коэффициента поверхностного натяжения поведение капли близко к поведению твердой частицы, поднимающейся с сохранением сферической формы. При конечных значениях коэффициента поверхностного натяжения, типичных для границ раздела несмешивающихся жидкостей, всплывающая капля принимает форму кольца, при этом поверхностное натяжение играет определяющую роль в динамике капли, являясь более существенным фактором, чем межфазная диффузия. При малых значениях коэффициента поверхностного натяжения, на коротких гидродинамических временных масштабах происходит перемешивание жидкостей и «растворение» капли, динамика капли напоминает поведение, полученное с помощью классического подхода в пренебрежении поверхностным натяжением.

ГЛАВА 2. ВЫМЫВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОНВЕКТИВНЫХ СТРУКТУР В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

2.1. Введение

Тепловая конвекция в пористых средах представляет интерес как с фундаментальной точки зрения, так и для прикладных задач, связанных с технологическими и природными процессами. Возникновение конвекции в горизонтальном пористом слое, подогреваемом снизу, имеет широкие приложения в технике и геофизике. Такие приложения касаются, например, динамики подземных резервуаров, распространения загрязняющих веществ в почве, поглощения CO_2 и теплоизоляции зданий.

В связи со множеством практических приложений большое внимание исследователей привлекает развитие конвективных течений при наличии локализованных источников тепла. Так в [109], по-видимому, впервые для однородной жидкости рассматривался конвективный факел от точечного источника и от горизонтального линейного источника, были найдены точные решения для некоторых наборов управляющих параметров. Устойчивость конвективного течения жидкости, вызываемого неоднородным нагревом, изучалась также в [110]. В [111] рассмотрено, как и какие пространственные конвективные структуры возникают при разных параметрах возбуждения (различных видах течений) при околокритической длинноволновой тепловой конвекции в слое однородной жидкости. Задача возникновения тепловой конвекции в горизонтальном слое пористой среды, ограниченном твердыми непроницаемыми изотермическими границами с заданной температурой, впервые теоретически изучалась в работе [112]. Найдены пороговые значения безразмерных параметров, при которых возникает конвекция. В [113] те же авторы исследовали эту проблему экспериментально, получены поправки к найденным теоретическим пороговым значениям числа Релея, обусловленные зависимостью вязкости от

температуры, не учитывающейся в теории. Исследование конвективного факела от точечного источника тепла в неограниченном массиве пористой среды впервые проводилось в [114], от горизонтального линейного источника — в [115]. В этих работах была применена теория пограничного слоя для вертикальных плоских течений в областях, где градиенты параметров жидкости очень велики. Установлено, что зависимость вязкости от температуры оказывает меньшее влияние на решение, чем можно было бы ожидать, исходя из ранних теорий. В работе [116] изучались свободная и вынужденная конвекции в окрестности линейного источника тепла или нагреваемого цилиндра. В [117] найдено, что при фиксированном тепловом потоке через границы горизонтального слоя оказывается возможной длинноволновая неустойчивость состояния механического равновесия как в случае пористой среды, так и в случае однородной жидкости. Крупномасштабная тепловая конвекция в насыщенном жидкостью горизонтальном слое пористой среды, ограниченном твердыми границами, при заданном нагреве и прокачивании жидкости через слой была объектом исследования в работе [118]. В [119] исследовалась термоконцентрационная конвекция бинарной смеси в горизонтальном слое пористой среды при наличии источника тепла или примеси. В двух последних работах установлено, что наиболее опасными являются длинноволновые возмущения.

Фактически первые исследования неустойчивости, обусловленной плавучестью, в насыщенных жидкостью горизонтальных пористых слоях, нагретых снизу, были проведены в [112], а также в [120] (эта задача известна как проблема Дарси–Бенара или проблема Хортон–Роджерса–Лэпвуда). В этих работах авторы рассматривали пористый слой, бесконечный в горизонтальных направлениях и ограниченный в вертикальном направлении двумя непроницаемыми границами с заданной температурой, так что создавался вертикальный градиент температуры. Предполагалось, что слой насыщен жидкостью, оценены пороговые условия для возникновения неустойчивости. Обнаружено, что конвекция возникает, когда число Релея–Дарси достигает

значения $4\pi^2$. Пратс [121] дополнительно добавил в задачу горизонтальный поток жидкости и обнаружил, что порог возникновения неустойчивости не зависит от массового расхода жидкости.

В [122], представлен обзор недавних исследований, касающихся как модальной неустойчивости, так и перехода к абсолютной неустойчивости для проблемы Пратса. В то время как анализ модальной неустойчивости сосредоточен на исследовании эволюции во времени отдельных мод Фурье, возмущающих все основное состояние, анализ абсолютной неустойчивости имеет дело с эволюцией волновых пакетов возмущений, выраженных интегралом Фурье по всем возможным волновым числам. Последний тип неустойчивости обычно наблюдается в лабораторной системе отсчета, когда локализованное возмущение распространяется в пространстве в направлении основного потока. Для этой системы отсчета нарастающие возмущения могут быть обнаружены только тогда, когда они не сносятся вниз по течению основным потоком. Иллюстрируя переход к абсолютной неустойчивости для задачи Пратса, автор указывает, что пороговое значение числа Релея — это монотонно возрастающая функция расхода основного течения, параметризованная через число Пекле. При увеличении скорости потока (числа Пекле) неустойчивое растущее возмущение с большей вероятностью будет переносится вниз по течению, так что основной поток становится более устойчивым.

Интересная постановка задачи Хортон–Роджерса–Лэпвуда, учитывающая анизотропию пористой среды, была исследована в нескольких работах [123-130]. В них авторы провели анализ модальной устойчивости, предполагая, что теплофизические свойства пористой среды имеют постоянные, хотя и разные значения вдоль всех трех координат. Влияние анизотропии на конвекцию в пористых средах также исследовалось в [131-134].

Критическое число Релея, характеризующее возникновение неустойчивости в пористых средах при вертикальном градиенте температуры, не зависит от

величины горизонтального потока жидкости. Однако наличие горизонтального потока жидкости вызывает колебания температуры и скорости со временем. Исследование этих колебаний необходимо для правильной интерпретации явлений, происходящих в технологических и природных процессах.

Лэпвуд [120] был первым, кто изучил влияние геотермального градиента на критерий устойчивости для свободной конвекции в мантии земли. Его исследование было продолжено и расширено последователями, особенно Вудингом [135]. Хотя основной акцент в этих работах был сделан на определении условий, которые привели бы к свободной конвекции в мантии земли, тот же анализ применим к любой насыщенной жидкостью пористой среде, нагреваемой снизу. Такие условия существуют в упакованных корпусах реакторов, используемых в производственных процессах и при откачке нефти из резервуаров, где используется тепловая энергия [136].

В диссертационной работе изучается процесс вымывания локализованных конвективных структур из области их возбуждения в горизонтальном слое пористой среды. Проводится как линейный анализ устойчивости основного состояния, соответствующего режиму однородного прокачивания, на основе уравнений, полученных в работе [118], так и численное моделирование на основе полных уравнений, описывающих поведение системы. Исследуется зависимость критической скорости прокачивания жидкости, необходимой для вымывания конвективных структур из области их возбуждения, от размеров области возбуждения.

2.2. Линейный анализ

2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим насыщенный вязкой несжимаемой жидкостью горизонтальный слой пористой среды. Слой ограничен твердыми плоскостями, на которых задан неоднородный по горизонтали вертикальный поток тепла. Система координат выбрана так, чтобы плоскость (x, y) была горизонтальной, а нижней и верхней границам слоя соответствовали координаты $z = 0$ и $z = h$. Перепады температуры считаются малыми, что позволяет положить, что плотность жидкости зависит от них линейно:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0)), \quad (41)$$

где ρ — плотность жидкости при температуре T , ρ_0 — плотность жидкости при температуре T_0 , соответствующей основному состоянию, β_T — коэффициент теплового расширения жидкости.

Уравнения свободной тепловой конвекции в пористой среде в рамках модели Дарси–Бусинеска имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} -\rho_0^{-1} \nabla p - \nu K^{-1} \vec{v} + g \beta_T T \vec{e}_z &= 0, \\ \partial_t T + b^{-1} \nabla \cdot (\vec{v} T) &= \chi \Delta T, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Здесь: ν — кинематическая вязкость, p — давление, \vec{v} — скорость фильтрации, b — теплоемкость пористой среды, отнесенная к теплоемкости жидкости, χ — температуропроводность насыщенной пористой среды, $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$ — вектор ускорения свободного падения, K — проницаемость среды.

Граничные условия записываются в виде:

$$z=0, h: \quad v_z=0, \quad \partial_z T = -A[1 + q(x, y)], \quad (43)$$

где $\chi C_p A[1 + q(x, y)]$ — приложенный поток тепла, C_p — теплоемкость, $q(x, y)$ — относительное (вызванное неоднородным нагревом) отклонение теплового потока

через границы слоя от критического значения для случая однородного нагрева, A — значение градиента температуры при однородном подогреве снизу, соответствующее порогу возникновения конвекции.

Линейный анализ устойчивости проводился на основе уравнения, описывающего длинноволновую конвекцию в пористой среде:

$$\partial_t \theta + \vec{U}(x, y) \cdot \nabla \theta + (2/21) \Delta^2 \theta - \nabla \cdot [(6/5) \nabla \theta (\nabla \theta)^2 - q(x, y) \nabla \theta] = 0. \quad (44)$$

Оно выведено в [118] из уравнений (42) в длинноволновом приближении. В (44): θ — отклонение температуры от основного состояния, которое характеризуется однородным вертикальным градиентом температуры и соответствует порогу конвекции в слое, $\vec{U}(x, y)$ — вектор, представляющий собой среднюю скорость адвективного течения. При выводе уравнения (44) рассматривался строго вертикальный поток тепла через слой, тепловая диффузия в горизонтальном направлении не учитывалась, отклонения температуры считались однородными вдоль оси z , а относительное отклонение теплового потока $q(x, y)$ — медленно меняющимся вдоль слоя, надкритичности полагались малыми. При выводе уравнения (44) для обозначения соотношения горизонтальных и вертикальных скоростей фильтрации был введен малый безразмерный параметр длинноволнового приближения ε : $\vec{v} = w \vec{e}_z + \varepsilon^{-1} \vec{u}$ (он также использовался для масштабирования горизонтальных координат $(x, y) \rightarrow (\varepsilon^{-1} x, \varepsilon^{-1} y)$). При этом условие медленного изменения $q(x, y)$ приводило (в терминах ε) к отношению $|\nabla q| / |q| \sim \varepsilon$. Управляющий параметр задачи — число Релея–Дарси, был зафиксирован на критическом значении, отвечающем случаю однородного нагрева: $R = R_c = 12$ (что является порогом устойчивости равновесия в задаче Релея–Бенара в длинноволновом приближении), таким образом, этот параметр не присутствует в уравнении в явном виде. Локальное число Релея–Дарси (определенное для малой области слоя) задавалось через значение $q(x, y)$: $R_{local} = R(1 + q)$, надкритическому режиму соответствовали его положительные значения, а подкритическому — отрицательные. Для обезразмеривания использовались следующие единицы

измерения: длины — толщина слоя h , времени — h/χ , скорости — $b\chi/h$, температуры — Ah , давления — $b\rho_0 v\chi/K$.

Следует отметить, что уравнения, подобные (44), могут быть применены для описания не только крупномасштабной конвекции в слое пористой среды, но и крупномасштабной турбулентности в конвекции Релея–Бенара, а также формирования конвективных структур в тонких пленках. Например, уравнение конвекции в слое однородной жидкости в длинноволновом приближении имеет похожий (с точностью до коэффициентов) вид [110], только слагаемое $\vec{U}(x, y) \cdot \nabla \theta$ заменяется на слагаемое $\nabla \cdot (\theta \vec{S})$, в котором вектор \vec{S} отвечает за перенос тепла вдоль слоя за счет адвекции и, в случае одномерной задачи, обращается в нуль.

В настоящем разделе рассматривается одномерная задача конвекции в горизонтальном плоском слое пористой среды, насыщенном жидкостью, при наличии неоднородного по горизонтали вертикального теплового потока и постоянного прокачивания жидкости в горизонтальном направлении. Рассматривается поток тепла следующего вида (см. рисунок 2.1):

$$q(x, y) = \begin{cases} -\beta^2, & x < 0, \\ \alpha^2, & 0 < x < L, \\ -\beta^2, & x > L, \end{cases} \quad (45)$$

где α, β — характеристики теплового потока, а L — длина области возбуждения конвективного движения. На рисунке 2.1 введены обозначения: II — область возбуждения (величины теплового потока в данной области достаточно для существования конвективного течения в случае однородного нагрева), I и III — области, в которых теплового потока недостаточно для возбуждения конвекции.

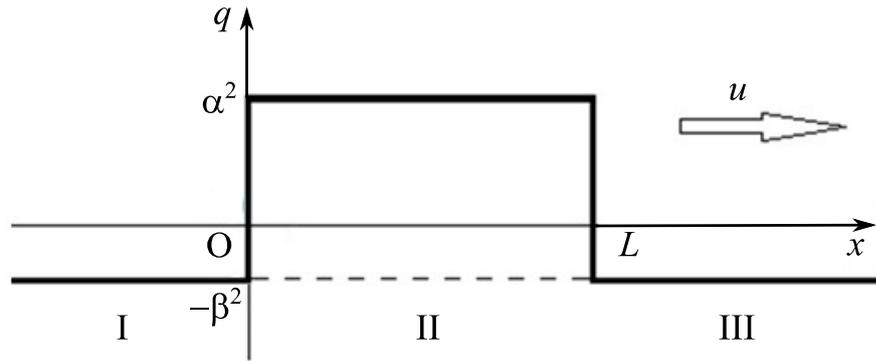


Рис.2.1. Распределение вертикального потока тепла по горизонтали

Уравнение (44) (в двумерном виде полученное в [100]) в одномерном случае приобретает вид:

$$\partial_t \theta + u \partial_x \theta + \partial_x^4 \theta - \partial_x ((\partial_x \theta)^3 - q(x) \partial_x \theta) = 0, \quad (46)$$

где u — скорость продольного прокачивания жидкости, заданная на удалении ($x = \pm \infty$) от области возбуждения. В диссертационной работе скорость прокачивания считается постоянной по всей длине слоя ($u = \text{const}$).

В уравнении (46) слагаемое $\partial_x(-q(x)\partial_x\theta)$ эффективно работает как тепловая диффузия с неоднородным коэффициентом теплопроводности $q(x)$. Оно может быть положительным или отрицательным. В первом случае происходит размывание температурных неоднородностей, во втором — усиление неоднородностей. За счет слагаемого $\partial_x^4\theta$ подавляются коротковолновые возмущения и предотвращается образование точек перегиба и разрывов поля в случае, когда значение $q(x)$ отрицательно, нелинейное слагаемое $\partial_x((\partial_x\theta)^3)$ описывает ограничение роста неоднородностей θ , если они становятся конечно-амплитудными.

Несмотря на свою малость ($u \sim \varepsilon^3$, в то время как $v \sim \varepsilon$, где ε — малый параметр, см. [118]), прокачка, обеспечивая не нулевой расход жидкости через поперечное сечение слоя, влияет тем самым на динамику системы, поскольку, при

равном нулю полном расходе через поперечное сечение, перенос (например, теплопередача) существенно менее эффективен по сравнению с ненулевым расходом. В слое, в отсутствие прокачивания жидкости ($u = 0$), могут возникать течения, локализованные в области возбуждения ($0 < x < L$) и вблизи нее. При увеличении скорости продольного прокачивания жидкости через слой в системе может возникать колебательный режим. Дальнейшее увеличение скорости прокачивания может приводить к «вымыванию» конвективного течения из области его возбуждения.

Целью исследования в данном разделе является нахождение критических значений скорости прокачивания, при которых система переходит из области монотонной неустойчивости или в область колебательной неустойчивости, или в устойчивое состояние.

2.2.2. Результаты работы

2.2.2.1. Монотонная неустойчивость

Рассмотрим устойчивость основного состояния $\theta = 0$. После линеаризации амплитудного уравнения (46) по отношению к малым возмущениям, слагаемое, содержащее $(\partial_x \theta)^3$, отбрасывается и $q(x)$ выносится из-под знака производной (так как $q(x)$ постоянно на отдельных участках, на которых производятся вычисления), в результате получается:

$$\partial_t \theta + u \partial_x \theta + \partial_x^4 \theta + q(x) \partial_x^2 \theta = 0 \quad (47)$$

Для изучения монотонной неустойчивости основного состояния использовались нормальные возмущения в виде:

$$\theta_j \sim e^{-\lambda t} e^{ik_j x}, \quad (48)$$

где θ_j — функции, соответствующие разным значениям волнового числа k , i — мнимая единица, j — индекс, нумерующий моды функции θ , λ — скорость роста возмущений (вещественная).

На границе монотонной неустойчивости $\lambda = 0$, и подстановка функций θ_j в линейризованное уравнение (47) дает характеристическое уравнение:

$$k^3 - q(x)k + iu = 0. \quad (49)$$

Решив уравнение (49) и подставив его решения k_j в (48), можно представить общее решение как суперпозицию функций θ_j . При этом слагаемые, расходящиеся при $x = \pm \infty$, отбрасываются (в ходе решения задачи были построены зависимости значений θ_j от x для конкретных наборов параметров задачи, в их рассмотренном диапазоне среди решений всегда присутствовали экспоненты с показателями разных знаков, расходящиеся, соответственно, на разных концах слоя). Исходя из этого, в областях затухания (I и III) нужно оставить одну экспоненту или сумму двух, а в области возбуждения (II) сумму всех трех экспонент с соответствующими коэффициентами.

В качестве граничных условий использовались условия непрерывности на границах области возбуждения:

$$\begin{aligned} \theta^I(0) &= \theta^{II}(0), & \theta^{II}(L) &= \theta^{III}(L), \\ \partial_x \theta^I(0) &= \partial_x \theta^{II}(0), & \partial_x \theta^{II}(L) &= \partial_x \theta^{III}(L), \\ \partial_x^2 \theta^I(0) &= \partial_x^2 \theta^{II}(0), & \partial_x^2 \theta^{II}(L) &= \partial_x^2 \theta^{III}(L), \end{aligned} \quad (50)$$

где верхним индексом обозначена принадлежность функции θ или ее производных к определенной области пространства. Граничные условия (50) дают систему шести уравнений для шести неизвестных. Приравняв определитель этой системы нулю, можно получить уравнение для критической скорости продольного прокачивания жидкости через слой в зависимости от длины области возбуждения локализованного течения.

Расчеты проводились в пакете аналитических вычислений Maple по следующему алгоритму: задавался набор значений параметров: α и β – отклонения теплового потока от критического значения (соответствующего порогу конвекции в слое), L – длина области возбуждения; с их учетом решалось уравнение (49); полученные корни $k(u)$ подставлялись в определитель системы (50). Далее, перебором значений u с фиксированным шагом, находилось значение U_{cr} , соответствовавшее смене знака определителя.

Результаты численных экспериментов для трех наборов параметров задачи приведены на рисунках 2.2-2.4. По оси ординат отложены критические значения скорости продольного прокачивания жидкости через слой, а по оси абсцисс — длина L области возбуждения. Ниже кривых основное состояние является неустойчивым по отношению к монотонным возмущениям, вызванным неоднородностью нагрева, при этом может возбуждаться и поддерживаться устойчивое конвективное течение. Выше же все монотонные возмущения затухают, то есть стационарные локализованные структуры либо не возбуждаются совсем, либо затухают со временем, и остается только однородное прокачивание жидкости через слой.

Сопоставив карты устойчивости для одного и того же значения параметра α и разных β (рисунки 2.2 и 2.3), можно заметить, что при увеличении β , то есть с ростом разности значений функции $q(x)$ в области возбуждения и вне ее, критическое значение скорости u , необходимое для перехода системы в устойчивое состояние при заданной длине области возбуждения, также становится больше (кривые растягиваются вверх и вправо). Кроме того, расширяется основание «колокола», и это приводит к тому, что при тех значениях длины области возбуждения, когда система выходит за границу монотонной неустойчивости (уже при малых скоростях продольного прокачивания жидкости через слой), появляются области, в которых основное состояние системы устойчиво.

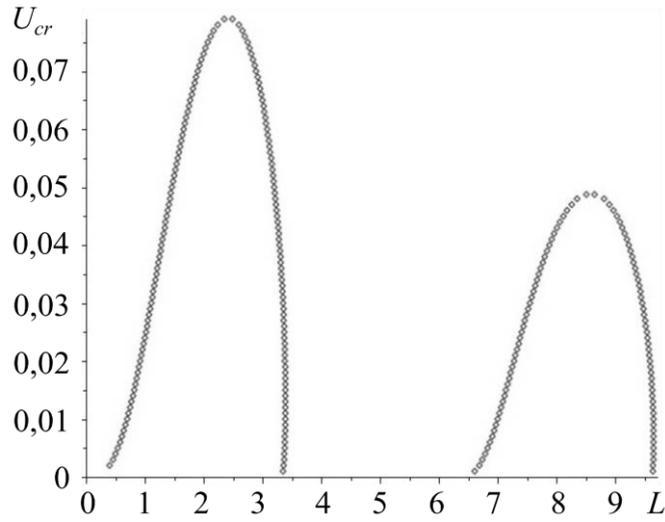


Рис.2.2. Карта устойчивости основного состояния при $\alpha=1$ и $\beta=0.1$.

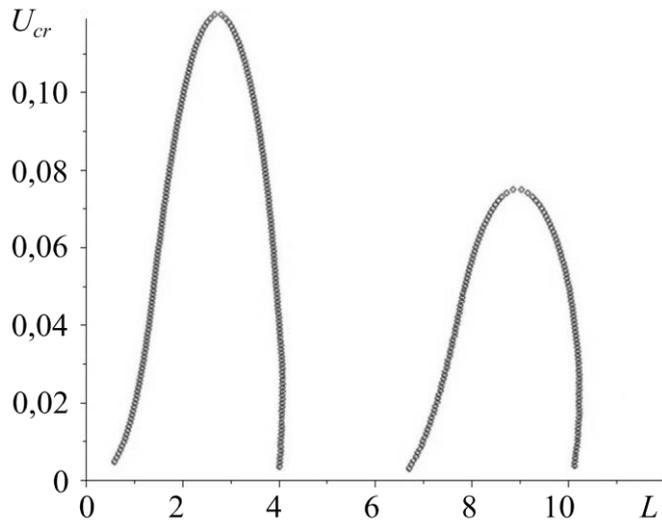


Рис.2.3. Карта устойчивости основного состояния при $\alpha=1$ и $\beta=0.5$.

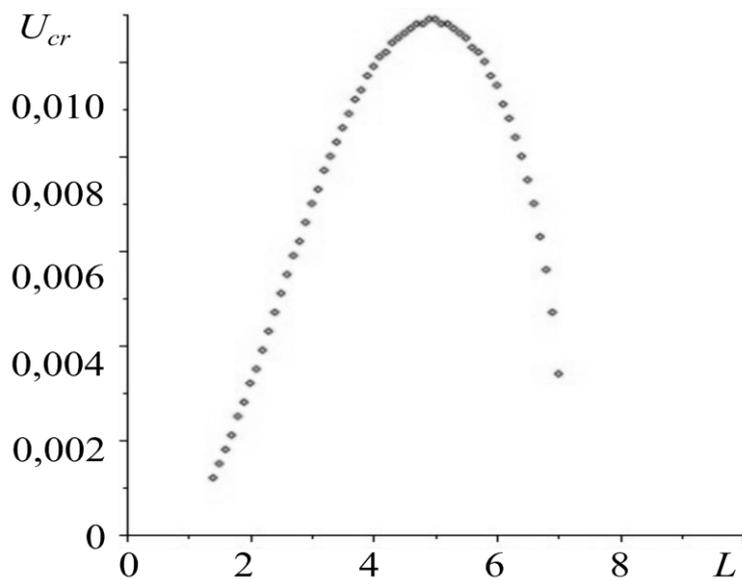


Рис.2.4. Карта устойчивости основного состояния при $\alpha=0.5$ и $\beta=0.1$.

Сравнение карт устойчивости для одного значения параметра β и разных α (рисунки 2.2 и 2.3) показывает, что при уменьшении параметра α , что соответствует уменьшению разности значений функции $q(x)$ в области возбуждения и за ее пределами, кривая прижимается к оси абсцисс и вытягивается вдоль нее.

2.2.2.2. Колебательная неустойчивость

Для изучения колебательной неустойчивости основного состояния использовались нормальные возмущения в виде:

$$\theta_j \sim e^{-(\lambda + i\Omega)t} e^{ik_j x}, \quad (51)$$

где Ω — частота колебаний.

Аналогично случаю монотонной неустойчивости на границе колебательной неустойчивости $\lambda = 0$. Подстановкой выражения для функций θ_j в уравнение (47), получается следующее характеристическое уравнение:

$$k^4 - q(x)k^2 + iuk - i\Omega = 0. \quad (52)$$

Решив уравнение (52) и подставив его решения k_j в (51), можно представить общее решение как суперпозицию функций θ_j . При этом моды, расходящиеся при $x = \pm \infty$, следует отбросить. Исходя из этого, в областях затухания (I и III) останутся суммы экспонент, не расходящихся на удалении от области возбуждения, а в области возбуждения (II) будет иметь место сумма всех четырех экспонент с соответствующими коэффициентами.

Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
\theta^I(0) &= \theta^II(0), & \theta^II(0) &= \theta^III(0), \\
\partial_x \theta^I(0) &= \partial_x \theta^II(0), & \partial_x \theta^II(0) &= \partial_x \theta^III(0), \\
\partial_x^2 \theta^I(0) &= \partial_x^2 \theta^II(0), & \partial_x^2 \theta^II(0) &= \partial_x^2 \theta^III(0), \\
\partial_x^3 \theta^I(0) &= \partial_x^3 \theta^II(0), & \partial_x^3 \theta^II(0) &= \partial_x^3 \theta^III(0),
\end{aligned} \tag{53}$$

и дают систему восьми уравнений для восьми неизвестных. Приравняв определитель системы (53) нулю, можно получить уравнение, описывающее зависимость скорости прокачивания жидкости через слой от длины области возбуждения локализованного течения.

По аналогии со случаем монотонной неустойчивости вычисления проводились в пакете Maple по похожему алгоритму (добавлялся перебор по частотам).

Граница колебательной неустойчивости для одного набора параметров задачи приведена на рисунке 2.5. По оси ординат отложены критические значения скорости прокачивания жидкости через слой, а по оси абсцисс — длина области возбуждения. Каждой точке на кривой 2 соответствует своя частота наиболее опасных возмущений. На этом же рисунке для сравнения представлена граница монотонной неустойчивости основного состояния, отвечающая тому же набору параметров задачи (кривая 1). В области между кривыми основное состояние

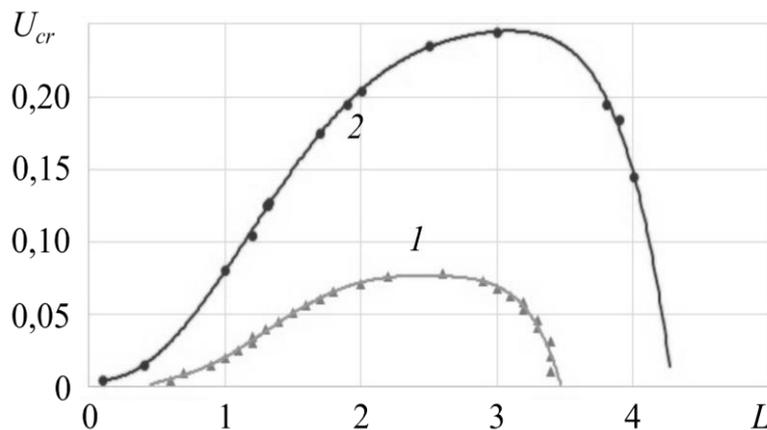


Рис.2.5. Карта устойчивости основного состояния при $\alpha=1$ и $\beta=0.1$; границы неустойчивости: колебательной (кривая 2) и монотонной (кривая 1)

системы устойчиво по отношению к монотонным и неустойчиво по отношению к колебательным возмущениям; в этом диапазоне параметров может существовать только осциллирующее локализованное течение. В области над кривой 2 основное состояние устойчиво, в этом диапазоне параметров в системе со временем остается только однородная прокачка жидкости вдоль слоя, т.к. величины теплового потока в области возбуждения уже недостаточно для зарождения и/или поддержания стационарных конвективных течений.

В работе [110] показано, что в отсутствие прокачивания для уравнения вида (44) возможна только монотонная неустойчивость, что противоречит полученным в диссертационной работе данным при $u > 0$ (см. рисунок 2.5). Но позднее в работе [137] было установлено, что в слое пористой среды при наличии прокачивания жидкости вдоль слоя и фиксированного теплового потока на границах наиболее опасными, при некоторых параметрах, становятся колебательные возмущения. Этим объясняется наличие на рисунке 2.5 области (в диапазоне L от 3.5 до 4) в которой система устойчива к монотонным возмущениям, но неустойчива к колебательным при малых значениях скорости прокачивания.

2.3. Численные расчеты

2.3.1. Постановка задачи

В настоящем разделе рассматриваются нелинейные режимы конвекции в насыщенном вязкой несжимаемой жидкостью горизонтальном слое пористой среды. Расчеты проводятся для прямоугольной области пористой среды длиной 10. Ячейка ограничена твердыми плоскостями, на которых задано неоднородное по горизонтали распределение температуры, схематическое изображение ячейки с наложенным продольным течением приведено на рисунке 2.6. Система координат выбрана так, чтобы плоскость (x,y) была горизонтальной, а нижней и верхней границам ячейки соответствовали координаты $z = 0$ и $z = h$.

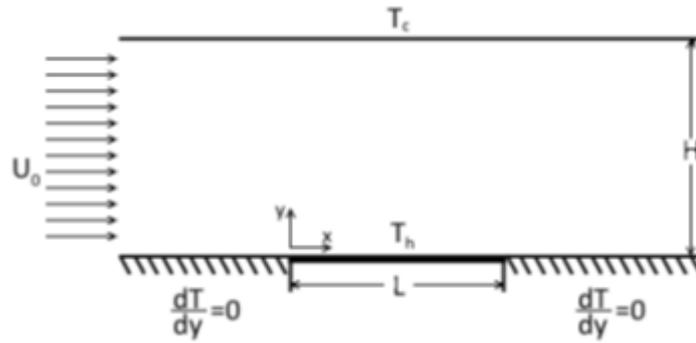


Рис.2.6. Схема задачи.

Конвективная фильтрация в слое описывалась в терминах функции тока ψ и температуры T уравнениями

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 Y} \right] = \frac{Ra}{Pe} \frac{\partial T}{\partial X}, \quad (54)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 Y} \right] + Pe \left[\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial T}{\partial Y} \right]. \quad (55)$$

Уравнения записаны в безразмерной форме и содержат следующие безразмерные параметры: фильтрационное число Релея и число Пекле

$$Ra = Kg\beta(T_h - T_c)H/\alpha_T\nu, \quad (56)$$

$$Pe = U_0H/\alpha_T, \quad (57)$$

где K - проницаемость среды, g - ускорение свободного падения, β - коэффициент теплового расширения, T_h - температура нагревателя, T_c - температура верхней границы, H - толщина слоя, α_T - эффективная теплопроводность насыщенной среды, ν - кинематическая вязкость жидкости, U_0 - скорость продольного прокачивания жидкости через полость.

Начальные условия для полей функции тока и температуры задавались в виде:

$$T(X, Y, 0) = 0, \quad (58)$$

$$\psi(X, Y, 0) = Y. \quad (59)$$

Граничные условия на верхней и нижней границах имели вид:

$$\psi(X, 1, t) = 1, \quad (60)$$

$$T(X, 1, t) = 0, \quad (61)$$

$$\psi(X, 0, t) = 0, \quad (62)$$

$$T(X, 0, t) = 1, \text{ при } -L/2 \leq X \leq L/2, \quad (63)$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y}(X, 0, t) = 0, \text{ при } X < -L/2 \text{ и } X > L/2. \quad (64)$$

На вертикальных границах ставились условия:

$$\frac{\partial T}{\partial X}(0, Y, t) = \frac{\partial T}{\partial X}(10, Y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial X}(0, Y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial X}(10, Y, t) = 0. \quad (65)$$

Задача решалась численно с помощью метода конечных разностей, использовалась явная схема с аппроксимацией пространственных производных с точностью второго порядка, с использованием сетки 40x400 узлов.

2.3.2. Результаты

На рисунке 2.7 приведены полученные в расчетах зависимости максимального значения функции тока от времени, иллюстрирующие временную эволюцию начальных возмущений основного состояния, соответствующего режиму однородного прокачивания, для числа Релея, равного 100, и разных значений числа Пекле, (для наглядности представлены максимальные значения функции $\bar{\psi} = \psi - \psi_0$, где $\psi_0 = 1$ соответствует режиму однородного прокачивания). На вставках показана структура установившегося течения для каждого из значений Пекле. Как видно из рисунка, при малом числе Пекле ($Pe=1$) интенсивность конвективного течения со временем растет и после переходного процесса выходит на постоянное значение, т.е. устанавливается стационарный режим конвекции в

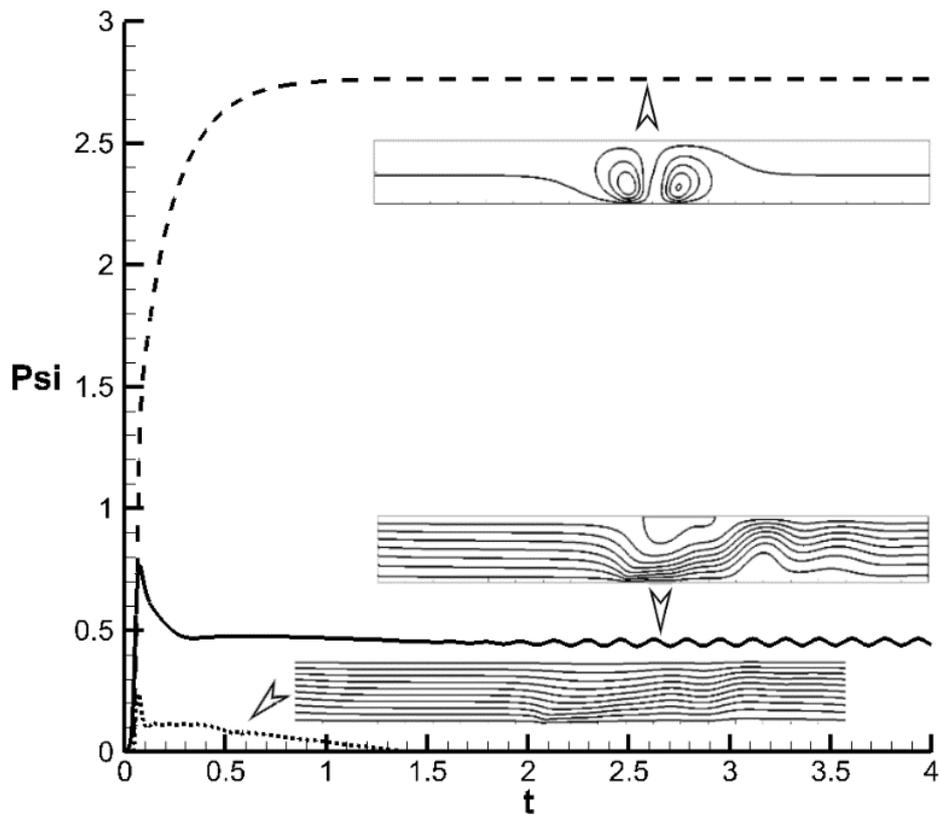


Рис.2.7. Зависимости максимального значения функции тока от времени при $L=1$, $Ra=100$, $Pe=15$ (точки), $Pe=8$ (сплошная), $Pe=1$ (пунктир)

слое. При большем числе Пекле ($Pe=8$) на начальном этапе возмущения также нарастают, но после переходного процесса устанавливается режим стационарных колебаний. При еще большем числе Пекле ($Pe=15$) начальные возмущения основного состояния затухают со временем и после переходного процесса максимальное значение функции тока ψ выходит на значение, равное 1, что соответствует режиму однородного прокачивания (значение $\bar{\psi} = \psi - \psi_0$ уменьшается до нуля), т.е. можно говорить о том, что конвективные структуры полностью вымываются из слоя. Следует также отметить, что в рассматриваемой ситуации равновесное состояние невозможно, при любом числе Релея существует слабое конвективное течение вблизи границ нагревателя, вызванное неоднородностью нагрева (наличием горизонтального градиента температуры).

На рисунке 2.8 представлена полученная путем обработки численных данных карта режимов на плоскости $Pe(L)$ для разных значений числа Релея (для построения кривых были получены и проанализированы данные о временной эволюции начальных возмущений, аналогичные приведенным на рисунке 2.7, в различных диапазонах параметров). Крестиками на рисунке отмечены точки, соответствующие параметрам, для которых на рисунке 2.7 приведены зависимости максимального значения функции тока от времени. Для $Ra=100$ выше границы колебательной неустойчивости, реализуется режим однородного прокачивания - возбуждаемое конвективное течение полностью вымывается из области его возбуждения с помощью продольного прокачивания. Ниже границы монотонной неустойчивости, после переходного процесса устанавливается стационарный режим. При значениях параметров в промежутке между указанными кривыми наблюдается режим стационарных колебаний. Для $Ra=80$ и $Ra=60$ нижние кривые

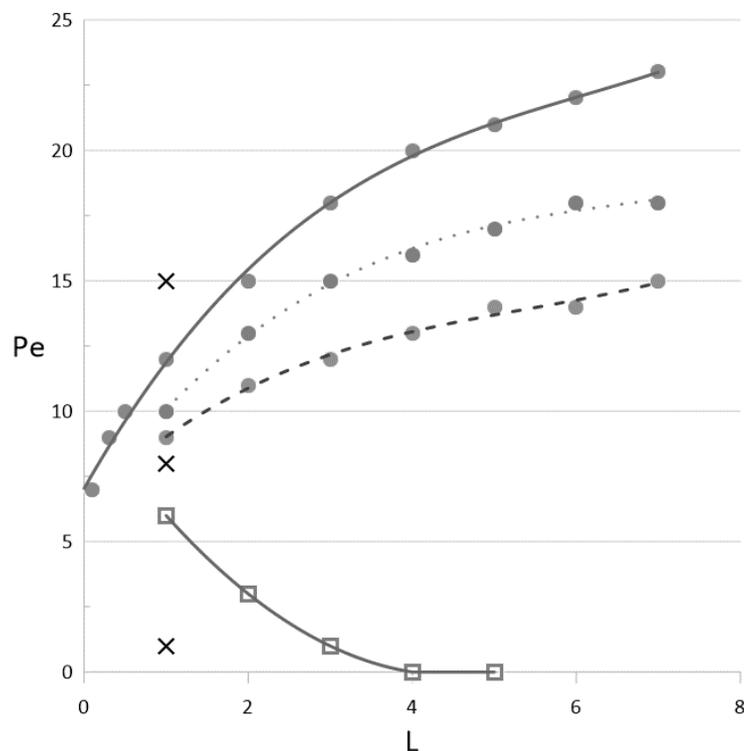


Рис.2.8. Карта режимов конвекции при $Ra=60$ (пунктир), $Ra=80$ (точки), $Ra=100$ (сплошная). Переход между монотонным и колебательным режимами отмечен квадратами, колебательным и однородным прокачиванием — кружками.

отсутствуют, при этих значениях Ra прокачивание жидкости через слой с любой скоростью приводит к возникновению колебательного режима конвекции. Выше границы колебательной неустойчивости поведение аналогично случаю $Ra=100$.

На рисунке 2.9 представлена зависимость волнового числа от числа Пекле для колебательных режимов конвекции. На вставках изображены изолинии функции тока, соответствующие крайним точкам диапазона значений числа Пекле, показанном на рисунке. Как видно, волновое число структур монотонно растет с увеличением числа Пекле по закону, близкому к линейному.

На рисунке 2.10 представлена зависимость частоты колебаний от числа Пекле. Как видно, с ростом числа Пекле наблюдается монотонное увеличение частоты колебаний по закону, близкому к линейному.

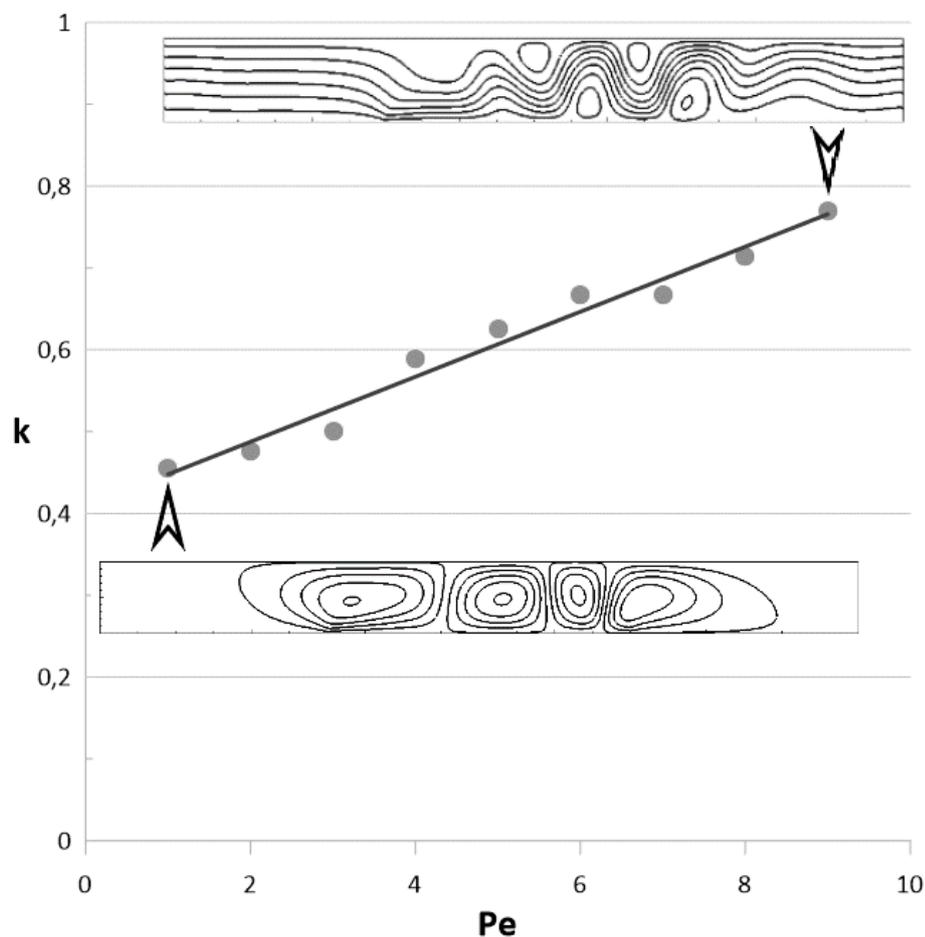


Рис.2.9. Зависимость волнового числа от числа Пекле при $L=4$, $Ra=100$.

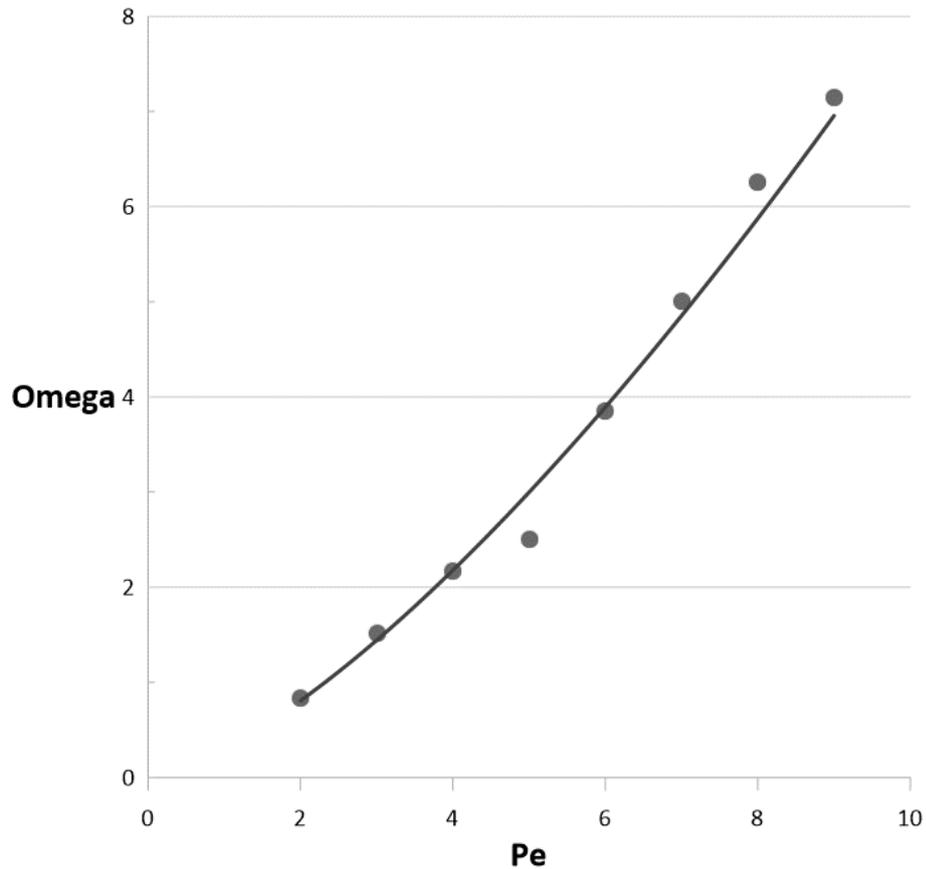


Рис.2.10. Зависимость частоты от числа Пекле при $L=4$, $Ra=100$.

На рисунке 2.11 представлена зависимость максимального значения функции тока от числа Пекле. Асимптотическое приближение кривой к значению $\psi = 1$, соответствующему режиму однородного прокачивания, указывает на затухание конвекции с ростом скорости прокачивания, связанное с вымыванием конвективных структур из области их возбуждения.

На рисунке 2.12 показана типичная структура возникающего в слое конвективного течения. Видны вихри, вымываемые основным течением из области возбуждения в направлении прокачивания жидкости (смещающиеся вправо).

На рисунке 2.13 представлено соответствующее тем же значениям параметров (приведенных на рисунке 2.12) поле температуры T .

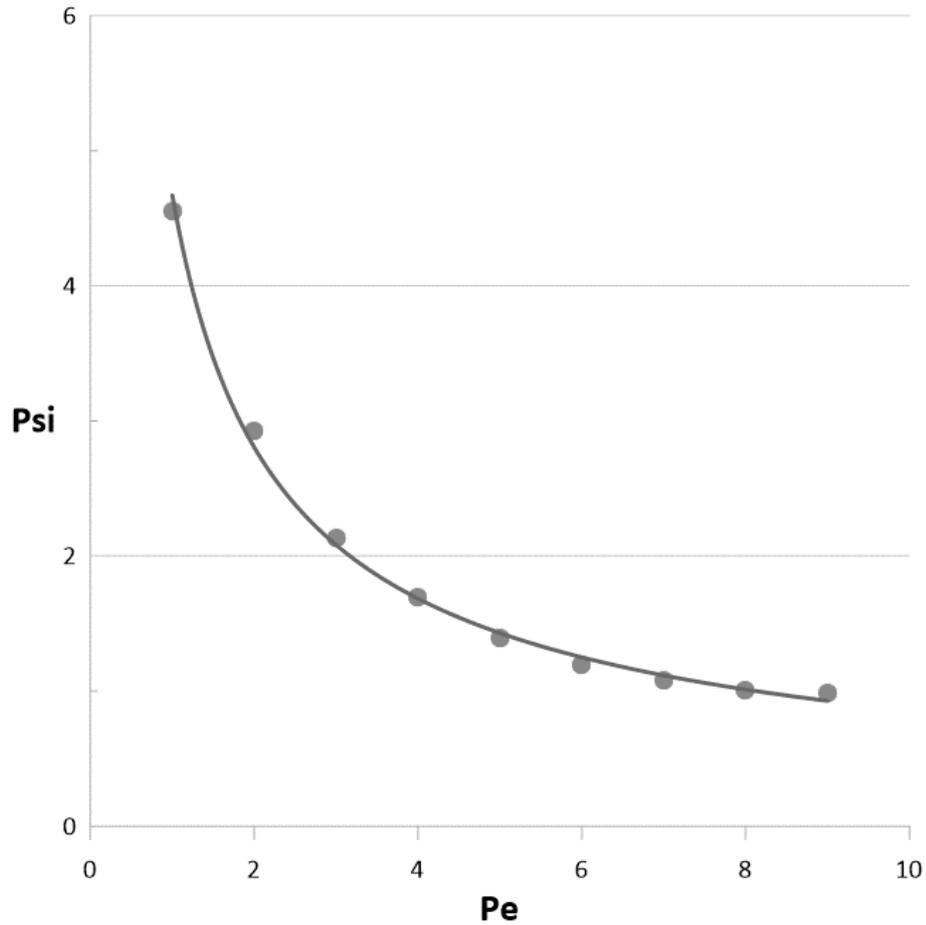


Рис.2.11. Зависимость максимального значения функции тока от числа Пекле при $L=4$, $Ra=100$.

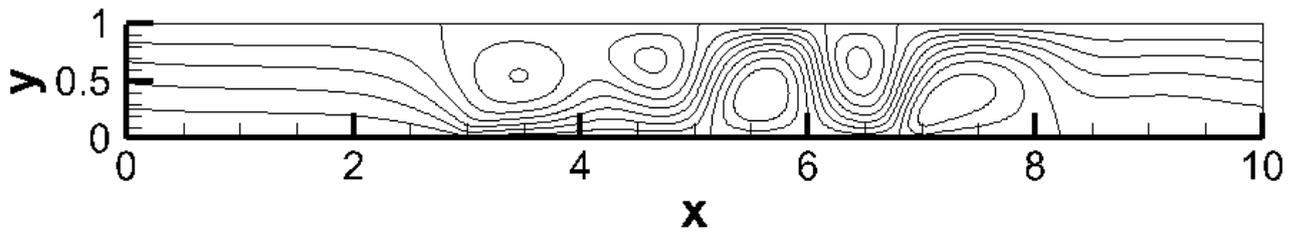


Рис.2.12. Изолинии функции тока при $L=4$, $Ra=100$, $Pe=5$, $t=2.5$.

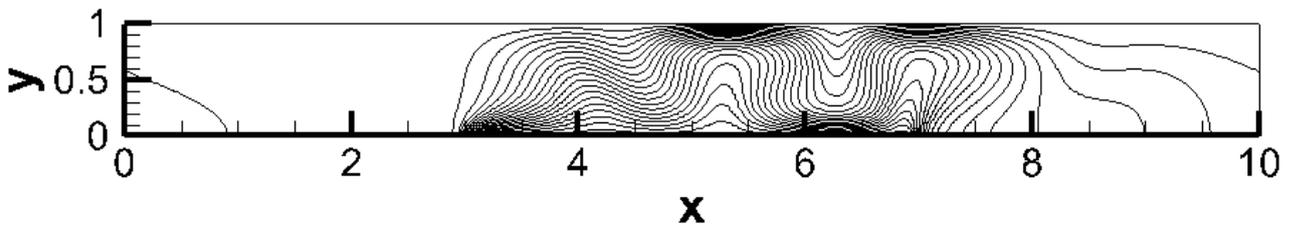


Рис.2.13. Изолинии температуры при $L=4$, $Ra=100$, $Pe=5$, $t=2.5$.

2.4. Выводы по разделу 2

В рамках линейного анализа исследовано возникновение конвекции в горизонтальном слое пористой среды, насыщенном жидкостью, при наличии неоднородного потока тепла на границах и прокачивания жидкости вдоль слоя. Обнаружены монотонная и колебательная неустойчивость основного состояния, соответствующего режиму однородного прокачивания жидкости. Найдено, что границы монотонной и колебательной неустойчивости на плоскости скорость-длина области возбуждения имеют колоколообразную форму, причем граница монотонной неустойчивости располагается ниже границы колебательной неустойчивости. В области ниже границы монотонной неустойчивости основное состояние системы неустойчиво по отношению к монотонным возмущениям, и в данном диапазоне параметров может существовать устойчивое локализованное конвективное течение. В области между границами монотонной и колебательной неустойчивости, основное состояние неустойчиво по отношению к колебательным возмущениям, здесь может существовать только осциллирующее локализованное течение. В области над границами колебательной неустойчивости режим однородного прокачивания устойчив. Найдено, что при увеличении разности значений теплового потока в области возбуждения и вне ее, критическое значение скорости увеличивается.

Численно исследованы двумерные нелинейные режимы конвекции. Найдено, что при малых числах Пекле (соответствующих малым скоростям прокачивания) наблюдается устойчивое локализованное стационарное конвективное течение. При промежуточных числах Пекле реализуется осциллирующее локализованное течение. При больших числах Пекле локализованные конвективные структуры полностью вымываются из области их возбуждения и наблюдается режим однородного прокачивания жидкости. Таким образом, с ростом скорости прокачивания жидкости через слой (при заданной длине области возбуждения) система переходит от режима стационарной конвекции к колебательному режиму, а затем к режиму однородного прокачивания. Это поведение аналогично поведению, обнаруженному в рамках линейного анализа, а также тому, что наблюдалось в сценариях «вымывания» локализованных

структур, возникающих при случайной пространственной неоднородности параметров в [138].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования

Изучена эволюция изотермической гетерогенной смеси двух медленно смешивающихся жидкостей с более тяжелой жидкостью внизу в горизонтальном плоском слое при наличии сдвигового потока вдоль границы раздела. Получены карты устойчивости на плоскости число Грасгофа, характеризующее стратификацию - волновое число. Для слабых поверхностных эффектов (малых чисел Кана) при малых числах Грасгофа наблюдается развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, при числах Грасгофа выше некоторого порогового значения - неустойчивости Холмбое. При усилении поверхностных эффектов наблюдается стабилизация неустойчивости Холмбое, что приводит к появлению области устойчивости между областями неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Холмбое.

С помощью метода фазового поля численно исследовано всплытие капли в другой жидкости, смешивающейся с первой. Обнаружено, что при очень высоких значениях коэффициента поверхностного натяжения, поведение капли близко к поведению твердой частицы, всплывающей с сохранением сферической формы. При конечных значениях коэффициента поверхностного натяжения, типичных для границ раздела несмешивающихся жидкостей, всплывающая капля принимает форму кольца, поверхностное натяжение играет определяющую роль, являясь более существенным фактором, чем межфазная диффузия. При малых значениях коэффициента поверхностного натяжения, динамика капли напоминает поведение, полученное в рамках классического подхода к описанию бинарной смеси в пренебрежении поверхностным натяжением: на коротких гидродинамических временах происходит перемешивание жидкостей и «растворение» капли.

В рамках линейного анализа исследовано возникновение конвекции в горизонтальном слое пористой среды, насыщенной жидкостью, при наличии

неоднородного по горизонтали вертикального потока тепла на границах и прокачивания жидкости вдоль слоя. Найдено, что границы неустойчивости основного состояния на плоскости скорость прокачивания - длина области возбуждения конвекции (область, в которой тепловой поток выше критического) имеют колоколообразную форму, области неустойчивости располагаются ниже кривых, граница монотонной неустойчивости располагается ниже границы колебательной. Найдено, что при увеличении разности значений теплового потока в области возбуждения и вне ее, критическое значение скорости прокачивания увеличивается.

Численное исследование нелинейных двумерных режимов конвекции показало, что при малых числах Пекле (малых скоростях прокачивания) наблюдается устойчивое стационарное конвективное течение, локализованное в области возбуждения. При промежуточных числах Пекле реализуется осциллирующее локализованное течение. При больших числах Пекле локализованные конвективные структуры полностью вымываются из области их возбуждения и наблюдается режим однородного прокачивания жидкости. Это поведение аналогично обнаруженному в рамках линейного анализа.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы

Следующим шагом в исследовании гетерогенных систем методом фазового поля может стать рассмотрение неизотермических задач. Функция свободной энергии в этом случае будет иметь более сложный вид и будет зависеть не только от концентрации, но и от температуры, что повлечет за собой усложнение математической модели теории фазового поля.

В изучении конвекции в слое пористой среды с заданным тепловым потоком на границах при наличии прокачивания жидкости вдоль слоя следующим этапом может быть исследование трехмерных конвективных режимов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zagvozhkin T. Advective Removal of Localized Convective Structures in a Porous Medium // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2018. – V. 59, N. 7. – P. 85-91.
2. Zagvozhkin T., Vorobev A., Lyubimova T. Kelvin-Helmholtz and Holmboe instabilities of a diffusive interface between miscible phases // Phys. Rev. E. – 2019. – V. 100. – P. 023103.
3. Zagvozhkin T., Lyubimova T. Numerical Calculation of the Process Removal of Localized Convective Structures in a Layer of a Porous Medium // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – V. 581. – P. 012021.
4. Vorobev A., Zagvozhkin T., Lyubimova T. Shapes of a rising miscible droplet // Physics of Fluids. – 2020. – V. 32. – P. 012112.
5. Загвозкин Т.Н., Любимова Т.П. Численное исследование адвективного вымывания локализованных конвективных структур в пористой среде // Неравновесные переходы в сплошных средах: материалы междунар. симп.: в 2 т. ПГНИУ – Пермь. – 2017. – Т. 1. – С. 175-178
6. Загвозкин Т.Н., Любимова Т.П. Численное моделирование процесса адвективного вымывания локализованных конвективных структур в пористой среде // Материалы V-й Всероссийской конференции с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения» Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь. – 2018. – С. 132-134
7. Любимова Т.П., Прокопьев С.А., Загвозкин Т.Н., Воробьев А.М. Моделирование смешиваемого вытеснения в капиллярных трубках методом фазового поля // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 19-24 августа, г., Уфа, Республика Башкортостан, Россия. – 2019. – С. 1056-1057.
8. Загвозкин Т.Н., Любимова Т.П., Воробьев А.М., Прокопьев С.А. Численное моделирование процесса всплытия капли методом фазового поля // Пермские гидродинамические научные чтения. Сборник материалов VI Всероссийской

- конференции, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова, 28–29 ноября 2019 г. – 2019 г. – С. 64-66.
9. Загвозкин Т.Н. Адвективное вымывание локализованных конвективных структур в слоистой пористой среде // XX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 13-16 февраля 2017 г. Тезисы докладов. – Екатеринбург: РИО УрО РАН. – 2017. – С. 126.
 10. Загвозкин Т.Н., Любимова Т.П. Численное моделирование процесса вымывания локализованных конвективных структур в слое пористой среды // XXI Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 18-22 февраля 2019 г. Тезисы докладов. – Пермь: ПФИЦ УрО РАН. – 2019. – С. 113.
 11. Lyubimova T., Vorobev A., Prokopen S., Zagvozkina T. Rayleigh-Taylor and Kelvin-Helmholtz instabilities of a miscible interfaces // Book of abstracts IMA-9, Guilin, China, August 31 – September 5. – 2018. – P. 75.
 12. Воробьев А.М., Прокопьев С.А., Любимова Т.П., Загвозкин Т.Н. Капиллярное давление на границе двух смешиваемых жидкостей // Пермские гидродинамические научные чтения. Сборник материалов V Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого, Д. В. Любимова, Пермь. – 2020. – С. 120-123.
 13. Prokopen S., Lyubimova T., Vorobev A., Zagvozkina T. GPU-based modelling of a two-phase flow in capillary networks // 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Abstract book, Milano, Italy, 22-27 August. – 2021. – P. 812-813.
 14. Rowlinson J.S. Translation of J.D. van der Waals “The thermodynamik theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density” // J. Stat. Phys. – 1979. – V. 20. – P. 197-200.
 15. Van der Waals J.D. The thermodynamic theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density. // J. Stat. Phys. – 1979. – V. 20. – P. 200-244.
 16. Korteweg D.J. Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais connues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une

- variation continue de la densité // Arch. Néerl. Sci. Exactes Nat. – 1901. – V. 6, N. 2. – P. 1-24.
17. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. – 1958. – V. 28, N. 2. – P. 258-267.
 18. Cahn J.W. On spinodal decomposition // Acta Metallurgica. – 1961. – V. 9, N. 9. – P. 795-801.
 19. Cahn J.W. On spinodal decomposition in cubic crystals // Acta Metallurgica. – 1962. – V. 10, N. 3. – P. 179-183.
 20. Cahn J.W. Phase separation by spinodal decomposition in isotropic systems // J. Chem. Phys. – 1965. – V. 42. – P. 93-99.
 21. Huston E.L., Cahn J.W., Hilliard J.E. Spinodal decomposition during continuous cooling // Acta Metallurgica. – 1966. V. 14, N. 9. – P. 1053-1062.
 22. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid // J. Chem. Phys. – 1959. – V. 31, N.1. – P. 688-699.
 23. Cahn J.W. Coherent fluctuations and nucleation in isotropic solids // Acta Metallurgica. – 1962. – V. 10, N. 10. – P. 907-913.
 24. Warren J.A., Boettinger W.J. Prediction of dendritic growth and microsegregation patterns in a binary alloy using the phase-field method // Acta Metallurgica et Materialia. – 1995. – V. 43, N. 1. – P. 689-703.
 25. Danilov D., Nestler B. Phase-field simulations of solidification in binary and ternary systems using a finite element method // J Cryst Growth. – 2005. – V. 275. – P. 177-182.
 26. Chen L-Q. Computer simulation of spinodal decomposition in ternary systems // Acta Metall Mater. – 1994. – V. 42. – P. 3503-3513.
 27. Elder KR., Grant M. Modeling elastic and plastic deformations in nonequilibrium processing using phase field crystals // Phys Rev E. – 2004. – V. 70. – P. 051605.
 28. Asle Zaeem M., Mesarovic SDj. Morphological instabilities in multilayer thin films // Comput Mater Sci. – 2010. – V. 50. – P. 1030-1036.
 29. Anderson DM., McFadden GB., Wheeler AA. Diffuse-interface methods in fluid mechanics // Annu Rev Fluid Mech. – 1998. – V. 30. – P. 139-165.

30. Fu H., Dehsara M., Krivilyov M., Mesarovic S. Dj., Sekulic D. P. Kinetics of the molten Al–Si triple line movement during a brazed joint formation // *Journal of Materials Science*. – 2016. – V. 51, N 4. – P. 1798-1812.
31. M. D. Krivilyov, S. Dj. Mesarovic, D. P. Sekulic. Phase-field model of interface migration and powder consolidation in additive manufacturing of metals // *Journal of Materials Science*. – 2017. – V. 52, N 8. – P. 4155-4163.
32. Foglino M., Morozov A.N., Henrich O., Marenduzzo D. Flow of deformable droplets: discontinuous shear thinning and velocity oscillations // *Phys. Rev. Lett.* – 2017. – V. 119, N. 20. – P. 208002.
33. Tiribocchi A., Montessori A., Bonaccorso F., Lauricella M., Succi S. Shear dynamics of polydisperse double emulsions // *Physics of Fluids*. – 2021. – V. 33. – P. 047105.
34. Lowengrub J., Truskinovsky L. Quasi-incompressible Cahn-Hilliard fluids and topological transitions // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 1998. – V. 454. – P. 2617-2654.
35. Antanovskii L.K. Microscale theory of surface tension // *Phys. Rev. E*. – 1996. – V. 54, N. 6. – P. 6285-6290.
36. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика, Ч. I, т. V, Статистическая физика, – Физматлит, М., 2002. – 616 с.
37. Jacqmin D. Calculation of two-phase Navier–Stokes flows using phase-field modeling // *Journal of Computational Physics*. – 1999. – V. 155, N.1. – P. 96-127.
38. Vorobev A., Boussinesq approximation of the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equations // *Phys. Rev. E*. – 2010. – V. 82. – P. 056312.
39. Vorobev A., Lyubimova T. Vibrational convection in a heterogeneous binary mixture. Part 1. Time-averaged equations // *J. Fluid Mech.* – 2019. – V 870. – P. 543.
40. Vorobev A. Dissolution dynamics of miscible liquid/liquid interfaces // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. – 2014. – V. 19. – P. 300.
41. Flory P. J., Principles of polymer chemistry, – Cornell University Press, 1953. – 672 p.
42. Xie R., Vorobev A. On the phase-field modelling of a miscible liquid/liquid boundary // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 2016. – V. 464. – P. 48.

43. Vorobev A., Boghi A. Phase-field modelling of a miscible system in spinning droplet tensiometer // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 2016. – V. 482. – P. 193.
44. Vorobev A., Khlebnikova E. Modelling of the rise and absorption of a fluid inclusion // *Int. J. Heat Mass Trans.* – 2018. – V. 125. – P. 801.
45. Lyubimova T., Vorobev A., Prokopev S. Rayleigh-Taylor instability of a miscible interface in a confined domain // *Phys. Fluids*. – 2019. – V. 31. – P. 014104.
46. Vorobev A., Lyubimova T. Vibrational convection in a heterogeneous binary mixture. Part 2. Frozen waves // *J. Fluid Mech.* – 2019. – V. 870. – P. 563.
47. Pojman J., Whitmore C., Liveri M., Lombardo R., Marszalek J., Parker R., Zoltowski B. Evidence for the existence of an effective interfacial tension between miscible fluids: Isobutyric acid - Water and 1-butanol- water in a spinning-drop tensiometer // *Langmuir*. – 2006. – V. 22. – P. 2569.
48. Kheniene A., Vorobev A. Linear stability analysis of a horizontal phase boundary separating two miscible liquids // *Phys. Rev. E*. – 2013. – V. 88. – P. 022404.
49. Rayleigh L., On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions // *Proc. London Math. Soc.* – 1879. – V. 57. – P. 1-11.
50. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // *Geofys. Publ. Oslo*. – 1950. – V. 17. – P. 1.
51. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* – Cambridge Press, 1961. – 652 p.
52. Drazin P. G. *Introduction to hydrodynamic stability* – Cambridge University Press, 2002.
53. Доронин Ю. П. *Физика океана* – Л.: Гидрометеоиздат, – 1978.
54. Howard L. Note on a paper of John W. Miles // *J. Fluid Mech.* – 1961. – V. 10. – P. 509.
55. Holmboe J. On the behavior of symmetric waves in stratified shear layers // *Geofys. Publ.* – 1962. – V. 24. – P. 67-113.
56. Drazin P. G. The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid // *J. Fluid Mech.* – 1958. – V. 4. – P. 214.

57. Maslowe S. A., Kelly R. E. Inviscid instability of an unbounded heterogeneous shear layer // *J. Fluid Mech.* – 1971. – V. 48. – P. 405.
58. Hazel P. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows // *J. Fluid Mech.* – 1972. – V. 51. – P. 39.
59. Howard L. N. Maslowe S. A., Stability of stratified shear flow // *Boundary-Layer Met.* – 1973. – V. 4. – P. 511.
60. Baines P. G., Mitsudera H., On the mechanism of shear flow instabilities // *J. Fluid Mech.* – 1994. – V. 276. – P. 327.
61. Caulfield C. P., Multiple linear instability of layered stratified shear flow // *J. Fluid Mech.* – 1994. – V. 258. – P. 255.
62. Carpenter J. R., Balmforth N. J., Lawrence G. A. Identifying unstable modes in stratified shear layers // *Phys. Fluids.* – 2010. – V. 22. – P. 054104.
63. Lawrence G. A., Haigh S. P., Zhu Z. In search of Holmboe's instability // *Coastal and Estuarine Studies.* – 1998. – V. 54. – P. 295.
64. Haigh S. P., Lawrence G. A. Symmetric and nonsymmetric Holmboe instabilities in an inviscid flow // *Phys. Fluids.* – 1999. – V. 11. – P. 1459.
65. Alabduljalil S., Rangel R. H. Inviscid instability of an unbounded shear layer // *J. of Engineering Math.* – 2006. – V. 54. – P. 99.
66. Alexakis A. Stratified shear flow instabilities at large Richardson numbers // *Phys. Fluids.* – 2009. – V. 21. – P. 054108.
67. Barros R., Choi W. Holmboe instability in non-Boussinesq fluids // *Phys. Fluids.* – 2011. – V. 23. – P. 124.
68. Koppel D. On the Stability of Flow of a Thermally Stratified Fluid under the Action of Gravity // *J. Math. Physics.* – 1964. – V. 5. – P. 963.
69. Smyth W. D., Peltier W. R. Instability and transition in finite-amplitude Kelvin–Helmholtz and Holmboe waves // *J. Fluid Mech.* – 1991. – V. 228. – P. 387.
70. Thorp S. A. A method of producing a shear flow in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* – 1968. – V. 32. – P. 693.
71. Thorp S. A. Experiments on the Stability of Stratified Shear Flows // *Radio Science.* – 1969. – V. 4. P. – 1327.

72. Hoog A. M., Ivey G. N. The Kelvin–Helmholtz to Holmboe instability transition in stratified exchange flows // *J. Fluid Mech.* – 2003. – V. 477. – P. 339.
73. Salehipour H., Caulfield C. P., Peltier W. R. Turbulent mixing due to the Holmboe wave instability at high Reynolds number. // *J. Fluid Mech.* – 2016. – V. 803. – P. 591-621.
74. Parker J. P., Caulfield C. P., Kerswell R. R. The viscous Holmboe instability for smooth shear and density profiles // *J. Fluid Mech.* – 2020. – V. 896, N. 14.
75. Thorpe S. A. *The Turbulent Ocean.* – Cambridge University Press, 2005.
76. Miller R. L., Lindzen R. S. Viscous destabilization of stratified shear flow for $Ri > 1=4$. // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* – 1988. – V. 42. – P. 49-91.
77. Parker J. P., Caulfield C. P., Kerswell R. R. Kelvin–Helmholtz billows above Richardson number $1/4$ // *J. Fluid Mech.* – 2019. – 879, R1.
78. Maslowe S. A. Critical layers in shear flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1986. – V. 18. – P. 405-432.
79. Troitskaya Y. I. The viscous-diffusion nonlinear critical layer in a stratified shear flow // *J. Fluid Mech.* – 1991. – V. 233. – P. 25-48.
80. Churilov S. M., Shukhman I. G. The nonlinear critical layer resulting from the spatial or temporal evolution of weakly unstable disturbances in shear flows // *J. Fluid Mech.* – 1996. – V. 318. – P. 189-221.
81. Taylor G. I. Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid // *Proc. R. Soc. Lond. A* – 1931. – V. 132. – P. 499-523.
82. Garcia R. V. Barotropic waves in straight parallel flow with curved velocity profile // *Tellus.* – 1956. – V. 8. – P. 82-93.
83. Cairns R. A. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows // *J. Fluid Mech.* – 1979. – V. 92. – P. 1-14.
84. Carpenter J. R., Tedford E. W., Heifetz E. Lawrence G. A. Instability in stratified shear flow: review of a physical interpretation based on interacting waves // *Appl. Mech. Rev.* – 2013. – V. 64. – P. 060801.

85. Caulfield C. P., Peltier W. R., Yoshida S., Ohtani M. An experimental investigation of the instability of a shear flow with multilayered density stratification // *Phys. Fluids*. – 1995. – V. 7. – P. 3028-3041.
86. Eaves T. S. Balmforth N. J. Instability of sheared density interfaces // *J. Fluid Mech.* – 2019. – V. 860. – P. 145-171.
87. Alexakis A. On Holmboe's instability for smooth shear and density profiles // *Phys. Fluids*. – 2005. – V. 17. – P. 084103.
88. Lindzen R. S. Instability of plane parallel shear flow (toward a mechanistic picture of how it works) // *Pure Appl. Geophys.* – 1988. – V. 126. – P. 103-121.
89. Smyth W. D. Peltier W. R. The transition between Kelvin–Helmholtz and Holmboe instability: an investigation of the overreflection hypothesis // *J. Atmos. Sci.* – 1989. – V. 46. – P. 3698-3720.
90. Joseph D. D., Renardy Y. Y., *Fundamentals of two-fluid dynamics. Part II: lubricated transport, drops and miscible liquids* // Springer-Verlag, 1993.
91. Kheniene A., Vorobev A. Linear stability of a horizontal phase boundary subjected to shear motion // *Eur. Phys. J. E.* – 2015. – V. 38. – P. 77.
92. May S. E., Maher J. V. Capillary-wave relaxation for a meniscus between miscible liquids // *Phys Rev Lett.* – 1991. – V. 67. – P. 2013-1016.
93. Lacaze L., Guenoum P., Beysens D., Delsanti M., Petitjeans P., Kurowski P. Transient surface tension in miscible liquids // *Phys Rev E.* – 2010. – V. 82. – P. 041606.
94. Zoltowski B., Chekanov Y., Masere J., Pojman J. A., Volpert V. Evidence for the existence of an effective interfacial tension between miscible fluids. 2. dodecyl acrylate-poly (dodecyl acrylate) in a spinning drop tensiometer // *Langmuir.* – 2007. – V. 23. – P. 5522-5531.
95. Gaponenko Y. A., Torregrosa M., Yasnou V., Mialdun A., Shevtsova V. Dynamics of the interface between miscible liquids subjected to horizontal vibration // *J. Fluid Mech.* – 2015. – V. 784. – P. 342-372.
96. Truzzolillo D., Cipelletti L. Off-equilibrium surface tension in miscible fluids // *Soft Matter.* – 2017. – V. 13. – P. 13–21.

97. Carbonaro A., Cipelletti L., Truzzolillo D. Spinning drop dynamics in miscible and immiscible environments // *Langmuir*. – 2019. – V. 35. – P. 11330-11339.
98. Kojima M., Hinch E. J., Acrivos A. The formation and expansion of a toroidal drop moving in a viscous fluid // *Phys Fluids*. – 1984. – V. 27. – P. 19-32.
99. Koh C. J., Leal L. G. The stability of drop shapes for translation at zero Reynolds number through a quiescent fluid // *Phys Fluids A*. – 1989. – V. 1. – P. 1309-1313.
100. Pozrikidis C. The instability of a moving viscous drop // *J. Fluid Mech.* – 1990. – V. 210. – P. 1-21.
101. Prokopev S., Vorobev A., Lyubimova T. Phase-field modeling of an immiscible liquid-liquid displacement in a capillary // *Phys. Rev. E*. – 2019. – V. 99. – P. 033113.
102. Ding H., Spelt P., Shu C. Diffuse interface model for incompressible two-phase flows with large density ratios // *J. Comput. Phys.* – 2007. – V. 226. – P. 2078-2095.
103. Tripathi M., Sahu K., Govindarajan R. Why a falling drop does not in general behave like a rising bubble // *Scient. Rep.* – 2014. – V. 4. – P. 4771.
104. Aitova E. V., Bratsun D. A., Kostarev K. G., Mizev A. I., Mosheva E. A. Convective instability in a two-layer system of reacting fluids with concentration-dependent diffusion // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2016. – V. 57. – P. 345-358.
105. Miller R., Liggieri L. Bubble and Drop Interfaces // *Progress in Colloid and Interface Science*, 2011. – V. 2.
106. Haberman W., Sayre R. Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes (David Taylor Model Basin). // *Tech. Rep.* – 1958. – V. 1143
107. Ybert C., di Meglio J.-M. Ascending air bubbles in protein solutions // *Eur. Phys. J. B*. – 1998. – V. 4. – P. 313–319.
108. Tasoglu S., Demirci U., Muradoglu M. The effect of soluble surfactant on the transient motion of a buoyancy-driven bubble // *Phys. Fluids*. – 2008. – V. 20. – P. 040805.
109. Brand R.S., Lahey F.J. The heated laminar vertical jet // *J. Fluid Mech.* – 1967. – V. 29, N. 2. – P. 305-315.

110. Любимов Д.В., Черепанов А.А. Устойчивость конвективных течений вызванных неоднородным нагревом // Конвективные течения, Пермь: Изд-во ПГПУ. – 1991. – С. 17-26.
111. Knobloch E. Pattern selection in long-wavelength convection // *Physica D.* – 1990. – V. 41, N. 3. – P. 450-479.
112. Horton C.W. Rogers Jr. F.T. Convection currents in a porous medium // *J. Appl. Phys.* – 1945. – V. 16, N. 6. – P. 367-370.
113. Morrison H.L., Rogers Jr. F.T., Horton C.W. Convection currents in porous media: II. Observation of conditions at onset of convection // *J. Appl. Phys.* – 1949. – V. 20, N. 11. – P. 1027-1029.
114. Wooding R.A. Convection in a saturated porous medium at large Rayleigh number or Peclet number // *J. Fluid Mech.* – 1963. – V. 15, N. 4. – P. 527-544.
115. Nakayama A. Free Convection from a horizontal line heat source in a power-law fluid-saturated porous medium // *Int. J. Heat Fluid Flow.* – 1993. – V. 14, N. 3. – P. 279-283.
116. Kurdyumov V.N., Liñán A. Free and forced convection around line sources of heat and heated cylinders in porous media // *J. Fluid Mech.* – 2001. – V. 427. – P. 389-409.
117. Nield D.A., Bejan A. *Convection in porous media.* – New York: Springer Verlag, 1998. – 546 p.
118. Goldobin D.S., Shklyayeva E.V. Large-scale thermal convection in a horizontal porous layer // *Phys. Rev. E.* – 2008. – V. 78, N. 2. – P. 027301.
119. Голдобин Д.С., Любимов Д.В. Термоконцентрационная конвекция бинарной смеси в горизонтальном слое пористой среды при наличии источника тепла или примеси // *ЖЭТФ.* – 2007. – Т. 131, № 5. – С. 949-956.
120. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* – 1948. – V. 44. – P. 508–521.
121. Prats M. The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums // *Journal of Geophysical Research.* – 1966. – V. 71. – P. 4835-4838.

122. Barletta A. Routes to Absolute Instability in Porous Media. – Springer, 2019.
123. Castinel G., Combarnous M. Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope horizontale // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série B. – 1974. – V. 287. – P. 701-704.
124. McKibbin R. Thermal convection in a porous layer: effects of anisotropy and surface boundary conditions // Transport in Porous Media. – 1986. – V. 1. – P. 271-292.
125. Qin Y., Kaloni P. N. Convective instabilities in anisotropic porous media // Studies in Applied Mathematics. – 1994. – V. 91. – P. 189-204.
126. Storesletten L. Effects of anisotropy on convective flow through porous media, In Transport Phenomena in Porous Media, edited by D. B. Ingham and I. Pop // Pergamon Press Oxford. – 1998. – P. 261-283.
127. Postelnicu A., Rees D. A. S. The onset of convection in an anisotropic porous layer inclined at a small angle from the horizontal // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2001. – V. 28. – P. 641-650.
128. Rees D. A. S., Postelnicu A. The onset of convection in an inclined anisotropic porous layer // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2001. – V. 44. – P. 4127-4138.
129. Rees D. A. S., Storesletten L., Postelnicu A. The onset of convection in an inclined anisotropic porous layer with oblique principle axes // Transport in Porous Media. – 2006. – V. 62. – P. 139-156.
130. Storesletten L., Rees D. A. S. Onset of convection in an inclined anisotropic porous layer with internal heat generation // Fluids. – 2019. – V. 4. – P. 75.
131. Rees D. A. S., Storesletten L., Bassom A. P. Convective plume paths in anisotropic porous media // Transport in Porous Media. – 2002. – V. 49. – P. 9-25.
132. Ennis-King J., Preston I., Paterson L. Onset of convection in anisotropic porous media subject to a rapid change in boundary conditions // Physics of Fluids. – 2005. – V. 17. – P. 084107.

133. Nield D. A., Kuznetsov A. V. The effects of combined horizontal and vertical heterogeneity and anisotropy on the onset of convection in a porous medium // *International Journal of Thermal Sciences*. – 2007. – V. 46. – P. 1211-1218.
134. De Paoli M., Zonta F., Soldati A. Influence of anisotropic permeability on convection in porous media: Implications for geological CO₂ sequestration // *Physics of Fluids*. – 2016. – V. 28. – P. 056601.
135. Wooding, R. A. Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium // *J. Fluid Mech.* – 1957. – V. 2. – P. 273-285.
136. Dirksen C. Thermal instability of fluids in porous media and its effect on segregated forward combustion // Paper 26 presented at the Fifty-Eighth National Meeting of the AIChE, Dallas, Texas, February 6-9, 1966.
137. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Mojtabi A., Sadilov E.S. Thermosolutal convection in a horizontal porous layer heated from below in the presence of a horizontal through flow // *Phys. Fluids*. – 2008. – V. 20, N. 4. – P. 044109.
138. Goldobin D.S., Shklyaeva E.V. Localization and advective spreading of convective flows under parametric disorder // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. – 2013. – V. 2013.