

На правах рукописи



**Ошмарин Дмитрий Александрович**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ SMART-СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ**

1.1.8– Механика деформируемого твёрдого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2022

Работа выполнена в «Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук» – филиале Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: **Матвеев Валерий Павлович**, доктор технических наук, профессор, академик РАН

Официальные оппоненты: **Калинчук Валерий Владимирович**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ФГБУН «Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук», главный научный сотрудник, отдела математики, механики и нанотехнологий (г. Ростов-на-Дону);

**Паньков Андрей Анатольевич**, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», профессор кафедры механики композиционных материалов и конструкций (г. Пермь).

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем машиноведения Российской Академии наук» (г. Санкт-Петербург).

Защита состоится **22 декабря 2022 г.** в 10:30 часов на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: [www.icmm.ru](http://www.icmm.ru).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте «Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук».

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » ноября 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, доцент



/А.Л. Зуев

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Smart-материалы, выполняя различные функциональные задачи, находят все более широкие приложения в различных областях науки и техники. Их ключевым отличием от традиционных конструкционных материалов является наличие связи между механическими полями (деформации, напряжения) и немеханическими (температура, электрическое поле, магнитное поле и т.д.). Изделия из smart-материалов широко применяются при создании smart-систем либо в качестве чувствительных элементов или сенсоров, способных регистрировать параметры окружающей среды или текущее состояние конструкции, либо в качестве элементов активного воздействия или актуаторов, которые позволяют изменять свойства объекта в нужном направлении.

В последние десятилетия наибольшее распространение получили smart-материалы, включающие в себя пьезоэлектрические элементы. При наличии электродированных поверхностей у пьезоэлемента к нему могут быть добавлены элементы электрических цепей: резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, которые в механических процессах являются аналогами вязкости, упругости и массы. Элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов в виде сенсоров либо актуаторов, широко используются для создания систем управления динамическим поведением конструкций. Данный факт можно объяснить тем, что пьезоматериалы обладают отличными электромеханическими свойствами: быстрый отклик, простота производства, малый вес, низкая стоимость, возможность работы в широком частотном диапазоне, низкое энергопотребление, отсутствие магнитного поля при преобразовании электрической энергии в механическую.

Одной из задач при использовании smart-материалов является управление динамическими процессами в механических системах, в частности, подавление различных мод колебаний. В большинстве случаев возникновение резонансных явлений в конструкциях негативно сказывается на их эксплуатационных характеристиках. В связи с этим крайне важной задачей как для проектировщиков, так и для исследователей, является разработка наиболее эффективных подходов к управлению динамическим поведением конструкций, позволяющему избегать негативных эффектов, связанных с воздействием нестационарных нагрузок.

Свойства smart-материала определяются характеристиками пьезоэлементов и их расположением в материале, архитектурой и параметрами электрических цепей, механическими характеристиками основного материала. Одной из актуальных задач проектирования и приложения smart-материалов является разработка методов математического моделирования для нахождения параметров smart-материалов, обеспечивающих их оптимальные свойства.

**Степень разработанности темы исследования.** Впервые возможность применения пьезоэлементов для управления механическими колебаниями была показана Forward R.L. в 1979 г. Вышедшие в 1981 году в Journal of Spacecraft and Rockets работы Swigert C.J. и Forward R.L. Electronic damping of orthogonal bending modes in a cylindrical mast (theory and experiment), которые наиболее часто отмечаются как работы, положившие начало интеллектуальным конструкциям, посвящены управлению ортогональными изгибными модами колебаний цилиндрической мачты.

В 1987 году Crawley E.F. и de Luis J. описали концепцию интеллектуальных конструкций, представляющих собой системы с распределенными актуаторами, сенсорами и обрабатывающими сетями. Первой попыткой объединить исследования динамического поведения конструкций и методики управления была монография Inman D.J. *Vibration with Control, Measurement and Stability*, вышедшая в 1989 г. На рубеже XX–XXI веков появились работы Meirovitch L. (*Dynamics and Control of Structures*, 1990) и Preumont A. (*Vibration Control of Active Structures: An Introduction*, 1997), посвященные активному управлению колебаниями, в которых была четко сформулирована связь между динамическим поведением системы и управлением. Rogers C.A. описал основные элементы традиционных систем управления с обратными связями и провел аналогию между элементами такого рода систем и человеческим организмом (сенсоры — нервные окончания, актуаторы — мышцы, контроллеры — мозг).

За период с начала 80-х годов прошлого века по настоящее время было опубликовано множество работ, посвященных различным аспектам использования пьезоэлементов в задачах управления динамическими процессами. В качестве авторов, которые внесли наиболее выдающийся вклад и активно работают в данной области, можно отметить следующих: Forward R.L., Swigert C.J., Lesieutre G.A., Crawley E.F., de Luis J., Moheimani S.O.R., Fleming A.J., Balas M.J., Hagood N.W., von Flotow A., Trindade M.A., Benjeddou A., Hollkamp J.J., Behrens S., Sunar M., Rao S.S., Sodano H.A., Inman D.J., dell' Isola F., Bergamini A.E., Ermanni P., Ducarne J., Thomas O., Deu J.-F., Høgsberg J., Krenk S., Беляев А.К., Матвеев В.П., Калинин В.В., Наседкин А.В.

Одним из вариантов управления динамическим поведением механических систем с помощью smart-материалов на основе пьезоэффекта является пассивное демпфирование колебаний. Суть данного подхода состоит в присоединении к пьезоэлектрическим элементам электрического импеданса или так называемое шунтирование пьезоэлектрических элементов. Основное достоинство данного подхода состоит в том, что при пассивном демпфировании не требуется наличия в управляемой системе сенсоров, и при соответствующей настройке шунта будет обеспечиваться ее устойчивое поведение.

Анализ литературы показал, что при описании динамического поведения конструкций с пьезоэлементами, зашунтированными электрическими цепями, доминирует подход на основе теории автоматического управления, в котором оптимальные характеристики smart-материала находятся из анализа характеристик передаточной функции электромеханической системы. При этом передаточная функция может формулироваться различным образом. Кроме того в рамках данного подхода существует несколько способов, позволяющих получить оптимальные значения параметров внешних электрических цепей, например, такие как оптимизация по передаточной функции  $\mathcal{H}_2$  или  $\mathcal{H}_\infty$  нормам, по равенству амплитуд в заданных точках, по методике размещения полюсов и т.д. С учетом многообразия вариантов построения передаточной функции, а также критериев ее оптимизации, оптимальные значения внешних цепей для одной и той же конструкции могут принимать различные значения.

В качестве главного преимущества подхода, основанного на построении передаточной функции, следует отметить возможность получения с его помощью аналитического решения для определения оптимальных значений параметров шунтирующей цепи. Однако, основным недостатком данного подхода является использование различного рода упрощений и допущений, применяемых при построении передаточных функций, которые могут приводить к тому, что полученные результаты не всегда оптимальны.

Количественная оценка степени демпфирования колебаний возможна на основе анализа амплитудных значений перемещений или деформаций на резонансных режимах или скорости затухания соответствующих мод колебаний. При описании колебаний конструкций на основе положений механики деформируемого твердого тела резонансные амплитуды, как правило, находятся из решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях, а скорости затухания колебаний – на основе результатов решения динамических задач с начальными условиями. Работы, в которых динамическое поведение smart-системы на основе пьезоэлементов и элементов электрических цепей анализируется с точки зрения собственных колебаний, описываемых в рамках механики сплошных сред, носят единичный характер.

**Целью** работы является новый вариант математической постановки задач о собственных колебаниях и о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними пассивными электрическими цепями; построение алгоритмов их численной реализации на основе метода конечных элементов (МКЭ); оптимизация диссипативных свойств smart-систем на основе пьезоэлементов с внешними электрическими цепями с использованием результатов решения задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Анализ существующих подходов и соотношений для математического описания квазистатического и динамического поведения кусочно-однородных тел, содержащих элементы, выполненные из материалов с пьезоэлектрическими свойствами, и элементы электрических цепей, а также численных методов решения соответствующих квазистатических и динамических задач.

2. Формулировка математической постановки задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями на основе известных соотношений линейной теории электроупругости, теории линейной наследственной вязкоупругости и линейных соотношений теории электрических цепей.

3. Разработка, апробация и верификация алгоритма численного решения задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями на основе метода конечных элементов с использованием подпрограмм коммерческого пакета конечно-элементного анализа ANSYS.

4. Анализ влияния параметров внешних электрических цепей на динамические характеристики конструкций, с расположенными на их поверхности пьезоэлементами, к электродированным поверхностям которых присоединены

внешние пассивные электрические цепи, обобщение и систематизация полученных результатов.

5. Выработка рекомендаций по использованию задачи о собственных колебаниях smart-систем на основе пьезоэлементов и элементов электрических цепей для поиска параметров системы, обеспечивающих максимальное демпфирование свободных колебаний, а задачи о вынужденных установившихся колебаниях — для поиска параметров, обеспечивающих минимальные резонансные амплитуды.

6. Поиск на основе разработанных постановок задач и алгоритмов их численной реализации новых вариантов smart-систем на основе пьезоэлементов

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:

- Предложен новый вариант математической постановки задачи о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними пассивными электрическими цепями различной конфигурации.
- Разработан конечно-элементный алгоритм численной реализации рассматриваемых задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругих тел с элементами электрических цепей на основе использования подпрограмм коммерческого пакета конечно-элементного анализа ANSYS.
- Предложен алгоритм поиска параметров smart-систем на основе пьезоэлементов, обеспечивающих ее максимальные электромеханические характеристики.
- Продемонстрированы возможности задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях для поиска вариантов smart-систем на основе пьезоэлементов и элементов электрических цепей с максимальными демпфирующими свойствами при свободных и вынужденных колебаниях.
- Предложен новый вариант построения smart-систем на основе пьезоэлементов и электропроводящих материалов и продемонстрирована возможность использования электропроводящих свойств деформируемых тел для дополнительного демпфирования, в том числе — мультимодального демпфирования.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость работы заключается в новой математической постановке задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями.

Практическая значимость работы состоит в алгоритмах решения задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях smart-систем, представляющих собой упругие и вязкоупругие тела с пьезоэлементами и элементами электрических цепей, которые позволяют найти параметры системы, обеспечивающие максимальные диссипативные свойства при свободных и вынужденных колебаниях.

**Методология и методы исследования.** Математическая постановка задачи о собственных колебаниях формулируется на основе вариационных принципов механики сплошных сред с использованием метода Галеркина. Алгоритм численного решения рассматриваемых задач разработан на основе метода конечных элементов, реализованного в авторских программах с применением ряда подпрограмм из

коммерческого пакета ANSYS. Для решения неклассической алгебраической проблемы комплексных собственных значений, к которой сводится задача о собственных колебаниях при применении процедур МКЭ, используется метод Мюллера в комбинации с принципом аргумента. Анализ зависимостей динамических характеристик исследуемых объектов и оптимизация диссипативных свойств проводятся на основе метода сканирования.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Математическая постановка задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями различной конфигурации.

2. Алгоритм численной реализации предложенной математической постановки задач о колебаниях электровязкоупругих тел методом конечных элементов с использованием подпрограмм из пакета прикладных программ конечно-элементного анализа ANSYS.

3. Численные результаты решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями.

4. Алгоритм поиска компоновки вязкоупругих тел пьезоэлементами, обеспечивающий максимальные электромеханические свойства электровязкоупругого тела.

5. Результаты поиска параметров smart-систем на основе пьезоэлементов и элементов электрических цепей с максимальными демпфирующими свойствами при свободных и вынужденных колебаниях.

6. Вариант smart-систем на основе пьезоэлементов и электропроводящих деформируемых материалов, демонстрация его возможностей для дополнительного демпфирования, в том числе — мультимодального демпфирования.

**Достоверность** полученных результатов подтверждена: численными экспериментами, демонстрирующими асимптотическую сходимость решения на основе метода конечных элементов при увеличении степени дискретизации; сопоставлением характеристик динамического поведения рассматриваемых систем, полученных на основе решения задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях; сопоставлением с результатами, полученными другими методами.

**Апробация работы.** Основные результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на 19 международных и российских научных конференциях: Всероссийская конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 2014); Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов Математическое моделирование в естественных науках (Пермь, 2014, 2015, 2016, 2017); Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2015, 2017, 2019); Всероссийская научная конференция «Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций» (Пермь, 2015); 9th European Solid Mechanics Conference (Spain, Madrid, 2015); XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015); ECCOMAS Congress 2016 VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Greece, Crete Island, 2016); Advanced Problems in Mechanics International Summer School-Conference (Санкт-Петербург, 2016, 2017); 8th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (Spain, Madrid, 2017);

X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017); 7th International Symposium on Aircraft Materials (France, Compiègne, 2018); IX ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (France, Paris, 2019); XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019); XIII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2019).

**Публикации.** Всего по теме диссертации опубликовано 48 работ, в том числе 11 статей в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, 2 статьи в виде глав в коллективных монографиях, 20 статей в прочих журналах, сборниках научных трудов и материалах конференций; 15 работ — в виде тезисов конференций.

**Личный вклад автора.** Разработка математической постановки задачи (совместно с научным руководителем); разработка алгоритма, позволяющего извлекать из конечно-элементного пакета ANSYS глобальные ансамблированные матрицы жесткости, масс и матрицы для электрической цепи для конструкции произвольной геометрии; разработка и реализация соответствующих программ на ЭВМ; проведение вычислений и анализ результатов.

**Структура и объем работы.** Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (179 наименований). Работа содержит 38 рисунков и 16 таблиц. Объем диссертации составляет 139 страниц.

**Благодарности.** Автор диссертационной работы выражает благодарность научному руководителю д.т.н., профессору, академику РАН Матвеевко В.П. а также д.ф.-м.н. Роговому А.А., к.ф.-м.н. Юрловой Н.А., к.т.н. Севодиной Н.В. и к.ф.-м.н. Лекомцеву С.В.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируется цель исследований, показывается научная новизна результатов и их практическая значимость, излагаются основные положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** диссертационной работы приводится вывод соотношений, описывающих математическую постановку задачи о колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями.

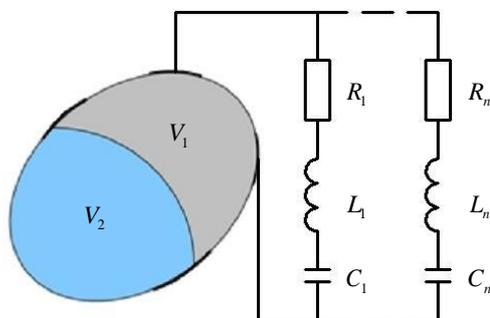


Рисунок 1 — Кусочно-однородное электровязкоупругое тело с внешней электрической цепью, состоящей из элементов сопротивления ( $R$ ), емкости ( $C$ ) и индуктивности ( $L$ )

Объектом исследования является кусочно-однородное тело объемом  $V = V_1 + V_2$  (рис. 1), где объем  $V_1 = \sum_{n=1}^N V_1^n$  состоит из  $N$  однородных электроупругих

(пьезоэлектрических) элементов, а объем  $V_2 = \sum_{m=1}^M V_2^m$  — из  $M$  однородных упругих или вязкоупругих элементов. К электродированным поверхностям рассматриваемого кусочно-однородного тела могут быть присоединены внешние электрические цепи различной архитектуры, состоящие из элементов сопротивления ( $R$ ), емкости ( $C$ ) и индуктивности ( $L$ ).

Электромагнитное поле в сплошной среде описывается системой макроскопических уравнений Максвелла, которая в случае решения задач статики и колебаний конструкций, выполненных из пьезоматериалов, может быть записана в следующем упрощенном виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы электрической и магнитной индукции характеризуют поляризацию и намагниченность среды. Величина  $\dot{\mathbf{D}}$  называется током смещения,  $\mathbf{H}$  — вектор напряженности магнитного поля. Электрическое поле является потенциальным, т.е.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — электрический потенциал.

Для описания деформационного поведения пьезоэлектрических сред используются линейные соотношения механики сплошных сред: уравнение движения и кинематическое уравнение:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (4)$$

Здесь:  $\boldsymbol{\sigma}$  — симметричный тензор механических напряжений Коши,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений,  $\rho$  — удельная плотность материала среды,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — симметричный тензор деформаций Коши.

На основе второго закона термодинамики выводятся физические соотношения для электроупругой среды:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{C}$  — тензор четвертого ранга, симметричный по первой и второй парам индексов, а также по индексам внутри пар, определяющий упругие свойства материала;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — симметричный тензор второго ранга, определяющий диэлектрические свойства материала;  $\boldsymbol{\beta}$  — тензор третьего ранга, симметричный по первым двум индексам, определяющий пьезоэлектрические свойства материала.

Вывод вариационного уравнения динамического деформирования пьезоэлектрических элементов осуществляется с использованием процедуры метода Галеркина. В результате всех проведенных преобразований вариационное уравнение, описывающее связанное электромеханическое состояние пьезоэлектрической среды, примет вид:

$$\int_{V_1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E}) dV + \int_{V_1} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS - \int_{S_q} q \delta \varphi dS. \quad (6)$$

В упругих частях объема  $V_2$  используются соотношения линейной теории упругости:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G_k \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \mathcal{G} \cdot \mathbf{I} \right) + \sigma \cdot \mathbf{I}, \quad \sigma = B_k \mathcal{G}, \quad (7)$$

а в вязкоупругих частях – соотношения линейной наследственной вязкоупругости:

$$\mathbf{s} = 2G_k^0 \left( \boldsymbol{\gamma} - \int_0^t H_k(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\tau) d\tau \right), \quad \sigma = B_k^0 \left( \mathcal{G} - \int_0^t F_k(t-\tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau \right). \quad (8)$$

Здесь:  $k=1,2,\dots,N$  — составные части объема  $V_2$ ;  $G_k, B_k$  — упругие сдвиговые и объемные модули;  $G_k^0, B_k^0$  — мгновенные сдвиговые и объемные модули;  $H_k, F_k$  — ядра релаксации;  $\sigma$  — среднее напряжение;  $\mathcal{G}$  — объемная деформация;  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$  — симметричный тензор напряжений Коши и тензор линейных деформаций;  $\mathbf{s}, \boldsymbol{\gamma}$  — девиаторы тензоров напряжений и деформаций;  $\mathbf{I}$  — единичный тензор;  $I_1(\boldsymbol{\varepsilon})$  — первый инвариант тензора деформаций.

Вывод вариационных уравнений для элементов внешней электрической цепи, таких как резистор с сопротивлением  $R$ , катушка индуктивности с индуктивностью  $L$  и конденсатор с емкостью  $C$ , осуществляется на основе известных соотношений теории электрических цепей с помощью уравнения Лагранжа (9):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{dF}{dq_i} = 0, \quad i = L, C, R, \quad (9)$$

где

$$\mathcal{L} = T - W = \frac{L \dot{q}_L^2}{2} - \frac{q_C^2}{2C}, \quad (10)$$

$$F = \frac{R \dot{q}_R^2}{2}. \quad (11)$$

В результате всех проведенных преобразований, вариационные уравнения для элементов сопротивления ( $R$ ), емкости ( $C$ ) и индуктивности ( $L$ ) примут вид (12–14):

$$\frac{1}{R} \int (\varphi_1^R - \varphi_2^R) \delta \varphi dt = 0; \quad C (\varphi_1^C - \varphi_2^C) \delta \varphi = 0; \quad \frac{1}{L} \iint (\varphi_1^L - \varphi_2^L) \delta \varphi dt dt = 0 \quad (12)$$

Общий вид решения задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях принимается следующим:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_0(\bar{x}) e^{i\omega t}, \quad (13)$$

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_0(\bar{x}) e^{i\Omega t}. \quad (14)$$

Здесь:  $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$  — комплексная собственная частота колебаний, действительная часть которой  $\omega_{\text{Re}}$  соответствует круговой частоте собственных колебаний, а мнимая часть  $\omega_{\text{Im}}$  является показателем демпфирования, характеризующим скорость затухания колебаний;  $\Omega$  — циклическая частота внешних приложенных воздействий;

обобщенный вектор состояния  $\bar{u}(\bar{x}, t) = \{u_1(\bar{x}, t), u_2(\bar{x}, t), u_3(\bar{x}, t), \varphi(\bar{x}, t)\}$ , в котором  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты вектора перемещений;  $\varphi$  — электрический потенциал.

В задачах о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях физические соотношения линейной вязкоупругости (8) заменяются комплексным динамическим модулем. В этом случае, связь между компонентами девиаторов тензоров напряжений и деформаций будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{s} = \gamma G_k^0 \left[ 1 - \Gamma_c^k(\omega_R) - i\Gamma_s^k(\omega_R) \right], \quad (15)$$

где  $\Gamma_c^k(\omega_R) = \int_0^\infty H_k \cos(\omega_R \tau) d\tau$ ,  $\Gamma_s^k(\omega_R) = \int_0^\infty H_k \sin(\omega_R \tau) d\tau$  — косинус- и синус-образы

ядер  $H_k$ . Аналогичные образом можно записать уравнение связи среднего напряжения с объемной деформацией.

С учетом вида решения (13) вариационное уравнение для задачи о собственных колебаниях электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями при отсутствии внешних нагрузок примет вид (16), а вариационное уравнение для задачи о вынужденных установившихся колебаниях — вид (17):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left( \int_{V_1^n} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} + \rho_n \omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) dV \right) + \sum_{m=1}^M \left( \int_{V_2^m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_m \omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) dV \right) - \\ & - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} \delta \varphi (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\omega R_q} (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = 0, \quad (16) \\ & \sum_{n=1}^N \left( \int_{V_1^n} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} + \rho_n \Omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) dV \right) + \sum_{m=1}^M \left( \int_{V_2^m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_m \Omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) dV \right) - \\ & - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\Omega^2 L_p} \delta \varphi (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\Omega R_q} (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi \quad (17) \\ & = \int_{S_\sigma} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{S_p} q_e \delta \varphi dS. \end{aligned}$$

Полученные уравнения (16) и (17) решаются численно методом конечных элементов.

**Вторая глава** посвящена построению алгоритма численной реализации задачи о колебаниях электровязкоупругих тел с элементами электрической цепи методом конечных элементов. Представлен вывод конечно-элементных соотношений для электроупругой среды, описываемой уравнениями (1–6). В качестве конечного элемента, используемого в рамках данной работы для моделирования поведения деформируемых тел, был выбран двадцатиузловой изопараметрический конечный элемент с квадратичной аппроксимацией искомых неизвестных. Приводятся общий вид используемого конечного элемента в локальной и глобальной системах координат, соотношения для функций формы конечного элемента, а также выражения для формирования матриц жесткости и масс. Содержится вывод конечно-элементных

соотношений для упругой и вязкоупругой сред, описываемой уравнениями (7), (8) и (15), соответственно.

На основании соотношений (12) для моделирования внешней электрической цепи предлагается новый вариант обобщенного двухузлового конечного элемента, представляющего собой параллельное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов. Приводятся выражения для формирования конечно-элементной и глобальной матриц жесткости для предлагаемого элемента.

Приводятся уравнения, описывающие процедуру формирования глобальных матриц жесткости, масс и векторов узловых усилий, сформулированных с учетом всех особенностей используемых конечных элементов. В результате проведенных преобразований основное разрешающее уравнение для задачи о собственных колебаниях в матричной форме окончательно приобретает следующий вид:

$$\left( \begin{array}{c} \sum_{n=1}^N [K_P^n] + \sum_{m=1}^M \left[ \begin{array}{c} (G_{\text{Re}}^{(m)} [K_G^m] + B_{\text{Re}}^{(m)} [K_B^m]) + \\ + i(G_{\text{Im}}^{(m)} [K_G^m] + B_{\text{Im}}^{(m)} [K_B^m]) \end{array} \right] - \\ - \omega^2 [M] - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} [K_{L_p}] \\ + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\omega R_q} [K_{R_q}] + \sum_{r=1}^{n_C} C_r [K_{C_r}] \end{array} \right) \{\delta\} = \{0\}. \quad (18)$$

Здесь используются следующие обозначения:  $[K_P^n]$  — матрица жесткости  $k$ -й пьезоэлектрической части;  $[K_B^m]$ ,  $[K_G^m]$  — объемная и сдвиговая компоненты матрицы жесткости  $l$ -й вязкоупругой части;  $[M]$  — матрица масс всей конструкции;  $[K_{L_p}]$  — матрицы для индуктивных элементов цепи (всего —  $n_L$ );  $[K_{R_q}]$  — матрицы для резистивных элементов цепи (всего —  $n_R$ );  $[K_{C_r}]$  — матрицы для емкостных элементов цепи (всего —  $n_C$ );  $L_p$ ,  $R_q$ ,  $C_r$  — величины сопротивления, индуктивности и емкости соответственно;  $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$  — искомая комплексная собственная частота колебаний системы.

Приводится обоснование необходимости разработки нового алгоритма для решения задач о собственных колебаниях кусочно-однородных электро-вязкоупругих тел с внешними электрическими цепями произвольной конфигурации. Проводится анализ возможностей коммерческого пакета конечно-элементного анализа ANSYS, позволяющих упростить процедуру построения конечно-элементного алгоритма. На основе проведенного анализа предлагается алгоритм построения разрешающего уравнения МКЭ (18).

Алгебраическим аналогом рассматриваемой задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями является неклассический вариант алгебраической проблемы комплексных

собственных значений. Для ее решения предлагается новый алгоритм на основе метода Мюллера.

Приводятся результаты верификации разработанного алгоритма на примере конструкции в виде консольно-защемленной пластины с расположенным на ее поверхности пьезоэлементом и внешней электрической цепью, состоящей из последовательно соединенных резистивного и индуктивного элементов. Верификация проводилась путем сравнения результатов, полученных на основе разработанного алгоритма, с результатами, полученными в пакете ANSYS, для частных случаев, моделирующих предельные режимы работы пьезоэлемента: режим холостого хода (open circuit) и короткого замыкания (short circuit). Численные расчеты показали достоверность результатов, получаемых на основе предложенного алгоритма.

Выбору оптимальных вариантов компоновки упругих тел пьезоэлементами посвящена **третья глава** диссертационной работы. Приводится анализ известных подходов к оценке степени проявления пьезоэлементом его пьезоэлектрических свойств и величины генерируемой им электрической энергии в задачах статического и динамического деформирования. Предложен алгоритм поиска оптимальной конфигурации упругой системы с пьезоэлементом на основе результатов решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электроупругих тел.

При разработке алгоритма поиска оптимальной конфигурации было рассмотрено два варианта величин, наиболее часто используемых для оценки генерируемой им электрической энергии: величина электрического потенциала, возникающего на незаземленном электроде пьезоэлемента при его деформировании, и коэффициент электромеханической связи. На основе полученных результатов был предложен еще один вариант показателя для количественной оценки степени проявления пьезоэлементом пьезоэлектрических свойств — интеграл от нормальной деформации в направлении оси поляризации, взятый по части поверхности конструкции, имеющей размеры пьезоэлемента.

При подборе компоновки системы пьезоэлементами на основе анализа величины генерируемого пьезоэлементом электрического потенциала необходимо производить нормировку собственного вектора относительно какой-либо из его компонент, которая должна быть одной и той же для всех компоновок.

Следующим вариантом величины, используемой для построения алгоритма подбора месторасположения пьезоэлементов в конструкции, был выбран коэффициент электромеханической связи, в общем случае определяемый для пьезоэлемента как отношение плотности взаимной энергии (энергии, способной к обращению) к среднему геометрическому значению плотности упругой и

электрической энергии  $k = \frac{U_{\text{вз}}}{\sqrt{U_{\text{уп}} U_{\text{эл}}}}$ . В том случае, когда пьезоэлемент прикреплен к

конструкции, коэффициент электромеханической связи может быть определен как:

$$K^2 = \frac{\omega_{o/c}^2 - \omega_{s/c}^2}{\omega_{s/c}^2}. \quad (19)$$

Здесь  $\omega_{o/c}, \omega_{s/c}$  — частоты в режимах холостого хода (open circuit) и короткого замыкания (short circuit) соответственно. Из определения коэффициента

электромеханической связи следует, что размещение пьезоэлемента можно считать оптимальным, если его значение в этом положении будет максимальным из всех возможных положений.

Подбор оптимальной компоновки системы пьезоэлементами также было предложено осуществлять на основе анализа распределения полей деформаций в конструкции. Для оценки степени проявления пьезоэффекта была использована новая величина:

$$J = \int_{S_n} \varepsilon_{ii} ds, \quad (20)$$

где  $i$  — ось, совпадающая с направлением поляризации пьезоэлемента,  $S_n$  — площадь поверхности пьезоэлемента, перпендикулярной оси поляризации. Главным преимуществом предложенного подхода к выбору оптимальной компоновки, по сравнению с рассмотренными выше, является возможность определения места расположения пьезоэлемента без его непосредственного присоединения к конструкции, только на основе анализа распределения деформаций.

Приводятся результаты численных расчетов по подбору оптимального места расположения пьезоэлемента в конструкции, представляющей собой тонкостенную оболочку в форме полуцилиндра.

В четвертой главе диссертационной работы приводятся приложения задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях для оценки диссипативных свойств smart-систем на основе пьезоэлементов и электрических элементов и выбора параметров элементов электрических цепей, обеспечивающих максимальное демпфирование колебаний. В качестве вариантов внешних электрических цепей рассмотрены наиболее распространенные схемы: резистивная цепь, состоящая из одного резистивного элемента, и резонансная электрическая цепь, состоящая из последовательно или параллельно соединенных резистивного и индуктивного элементов. Объектам исследования выбраны консольно-защемленная упругая пластинка и тонкостенная оболочка в форме полуцилиндра, жестко защемленная по торцам и свободно опертая по образующим (рис. 2). Пластинка и оболочка имеют размеры  $l_1 = 210$  мм,  $b_1 = 26$  мм,  $h_1 = 0.5$  мм,  $r_2 = 76$  мм,  $l_2 = 300$  мм,  $h_2 = 0.25$  мм и выполнены из материала, имеющего характеристики  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Пьезоэлемент имеет размеры  $50 \times 20 \times 0.36$  мм и выполнен из пьезокерамики PZT-4.

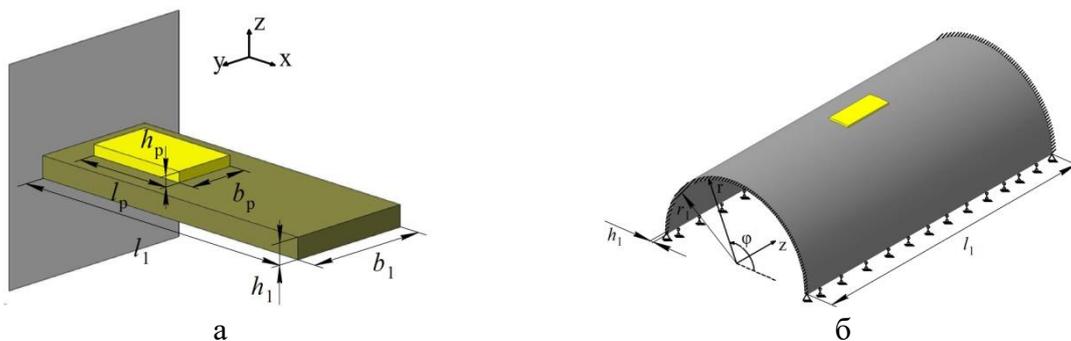


Рисунок 2 — Расчетные схемы конструкций: пластинка (а), оболочка (б)

Для конструкций с рассматриваемыми вариантами внешних электрических цепей найдены зависимости действительной и мнимой частей комплексной собственной частоты для различных мод колебаний. Полученные зависимости показали, что для всех мод, кроме дополнительной, возникающей за счет использования резонансной  $RL$ -цепи, мнимая часть комплексной собственной частоты колебаний имеет четко выраженный экстремум, соответствующий максимальной скорости затухания свободных колебаний. Полученные численные результаты позволили сформулировать условие, однозначно определяющее максимальное демпфирование соответствующей моды при свободных колебаниях smart-системы на основе пьезоэлементов, к электродированным поверхностям которых присоединены электрические цепи:

$$|\omega_{lm}^n| \rightarrow \max. \quad (21)$$

Приведены результаты численных исследований, позволяющие сравнить показатели демпфирования при значениях параметров цепей, найденных на основе известных передаточных функций и на основе предлагаемых алгоритмов решения задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях рассматриваемых smart-систем для варианта последовательной резонансной  $RL$ -цепи. Для сравнения выбрана передаточная функция, представленная в работе [1]<sup>1</sup>, так как она наиболее часто встречается в различных приложениях. Для пластинки и оболочки рассчитаны значения сопротивлений и индуктивностей основе передаточной функции, представленной в [1], а также на основе выполнения соотношения (21). Для найденных значений параметров цепи были определены значения действительных и мнимых составляющих комплексных собственных частот колебаний.

Полученные результаты демонстрируют, что параметры электрических цепей, найденные на основе решения задачи о собственных колебаниях, обеспечивают более высокие показатели демпфирования, чем параметры цепей, найденные на основе известных передаточных функций. Графической иллюстрацией этих сопоставлений являются приведенные на рис. 3 временные зависимости собственных затухающих колебаний при параметрах цепей, найденных на основе анализа собственных частот колебаний и на основе передаточной функции, которая, по сравнению с другими, обеспечивает лучшие показатели демпфирования при свободных колебаниях.

При вынужденных установившихся колебаниях величиной, характеризующей демпфирование колебаний, является амплитуда перемещений, деформаций или напряжений при соответствующих резонансах. В качестве примера поиска параметров  $RL$ -цепи, обеспечивающих максимальное демпфирование вынужденных установившихся колебаний, рассмотрена пластина (рис. 2а) при заданных перемещениях торца  $x = 0 : u_x = u_y = 0, u_z = U_0 \cos(pt)$ . На рисунке 4 при различных значениях  $R$  и  $L$  представлены линии равного уровня значений амплитуды перемещений свободного торца пластины в окрестности первого резонанса, а также линии равного уровня для значений мнимой части комплексной собственной частоты первой моды колебаний.

<sup>1</sup> [1] Hagood, N. W. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. / N. W. Hagood, A. von Flotow // Journal of Sound and Vibration. – 1991. – Vol.146. – No.2. – P.243–268.

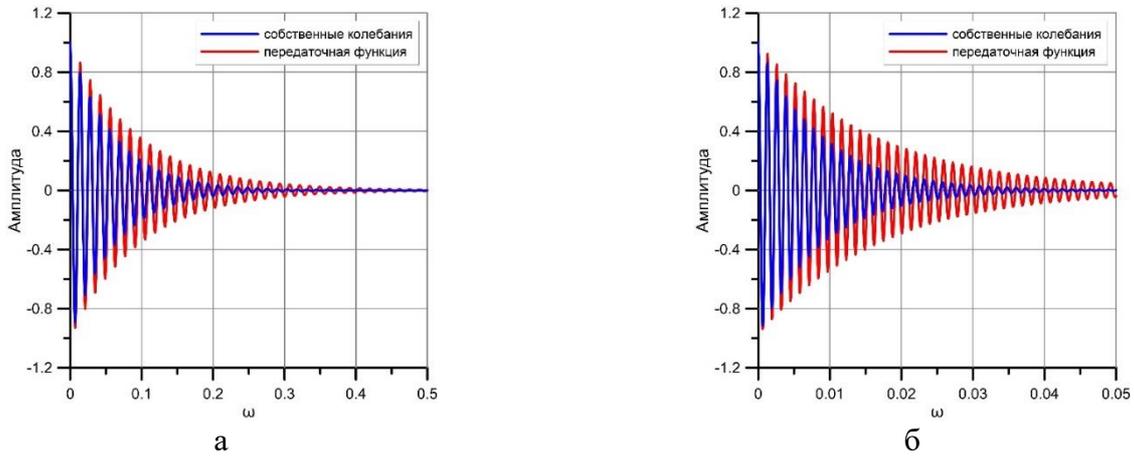


Рисунок 3 — Временные зависимости собственных затухающих колебаний второй моды колебаний пластины (а) и четвертой моды колебаний оболочки (б)

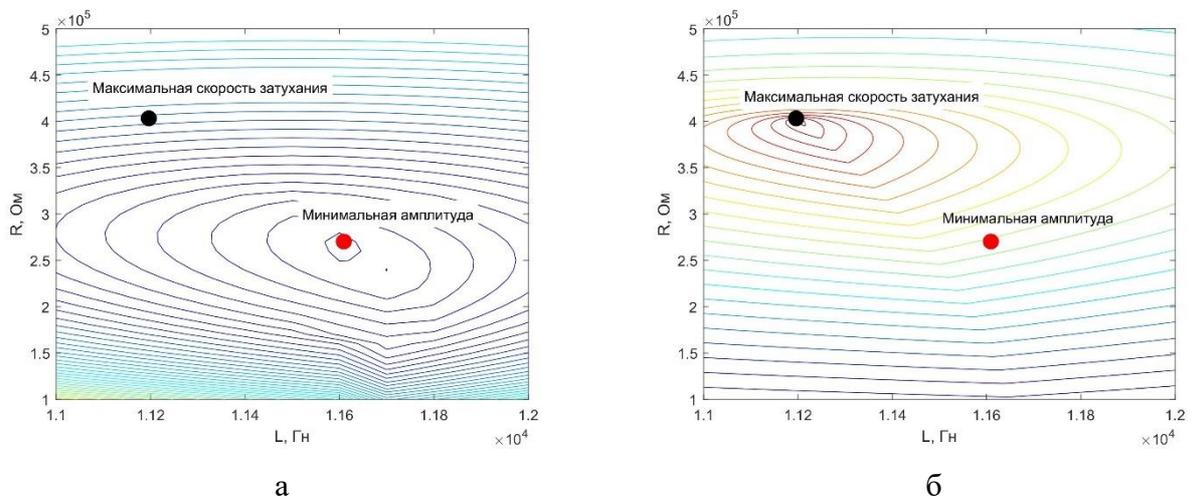


Рисунок 4 — Линии равного уровня резонансных амплитуд (а) и мнимой части комплексной собственной частоты (б) для первой моды

На этих рисунках красная точка соответствует параметрам  $R$  и  $L$ , при которых достигается минимальное значение амплитуды, а черная точка — параметрам, при которых модуль мнимой части первой комплексной собственной частоты принимает максимальное значение. Эти результаты демонстрируют различие значений параметров элементов  $RL$ -цепи, обеспечивающих максимальное демпфирование соответствующей моды при вынужденных колебаниях и при свободных колебаниях.

Для рассмотренного примера получены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) при четырех различных вариантах значений параметров последовательной  $RL$ -цепи, приведенные на рисунке 5. В первом варианте параметры найдены из условия минимума амплитуды при вынужденных установившихся колебаниях; во втором — из условия (21); в третьем варианте параметры определялись на основе передаточной функции, которая, по сравнению с другими, обеспечивает максимальное демпфирование при свободных колебаниях; в четвертом — на основе передаточной функции, обеспечивающей наилучшее демпфирование при вынужденных колебаниях.

Приведенные результаты демонстрируют поиск на основе результатов решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях значений  $R$  и  $L$ , обеспечивающих

минимальные значения резонансных амплитуд на всем частотном диапазоне. Известные передаточные функции обеспечивают достаточно близкие результаты, но, как правило, только на одной из резонансных частот.

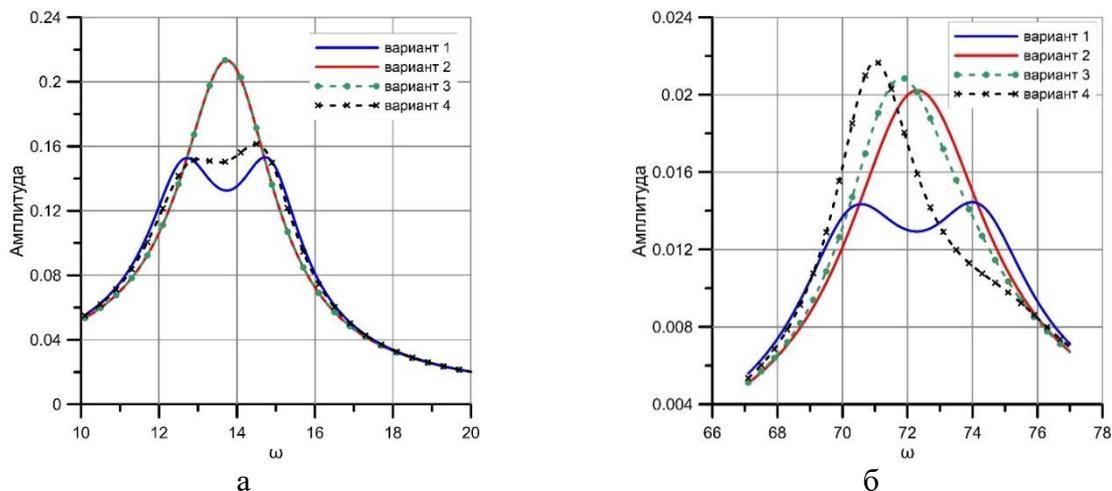


Рисунок 5 — АЧХ для первой (а) и второй (б) мод колебаний пластинки при четырех вариантах значений параметров цепи

Для модельных конструкций выполнен поиск параметров последовательных и параллельных  $RL$ -цепей, обеспечивающих максимальные диссипативные свойства для различных мод колебаний. Показано, что последовательная  $RL$ -цепь обеспечивает практически одинаковый с параллельной цепью результат при существенно меньших значениях параметров электрических элементов.

Численными экспериментами продемонстрирована возможность совпадения значений мнимых частей собственных частот колебаний у нескольких мод колебаний при одинаковых значениях  $R$  и  $L$ . Этот результат демонстрирует возможность мультимодального демпфирования при использовании одной  $RL$ -цепи.

Возможность использования в smart-структурах электрических цепей стимулирует развитие соответствующей элементной базы для исполнения электрических элементов. Анализ литературы об электропроводящих полимерах, в том числе — графеновых композитах, позволяет сделать заключение, что элементы из этих материалов могут одновременно с реализацией механических свойств как деформируемое тело выполнять роль резистивных элементов. На основе этого заключения предлагается вариант smart-систем, в которых используются элементы из электропроводящих материалов, реализующие классические механические свойства и выполняющие роль резистора или магазина резисторов.

В качестве примера рассмотрен вариант smart-системы на основе пьезоэлементов, в которой используются электропроводящие композиционные материалы, в частности — графеновые композиты, в качестве материалов, реализующих классические механические свойства и выполняющих роль резистора или магазина резисторов. Расчеты выполнены для консольно-заземленной пластинки из алюминия, представленной на рис. 6а ( $500 \times 100 \times 1$  мм), к верхней грани которой прикреплена пластина из пьезоэлектрического материала ПКР-7 ( $60 \times 90 \times 1.3$  мм), а к нижней грани — пластина из графенового композита ( $100 \times 100 \times 2$  мм) на основе

полиметилметакрилата. Рассмотрен пример электрической цепи из трех резистивных элементов, которые по очереди могут подключаться к электродированным поверхностям пьезоэлемента.

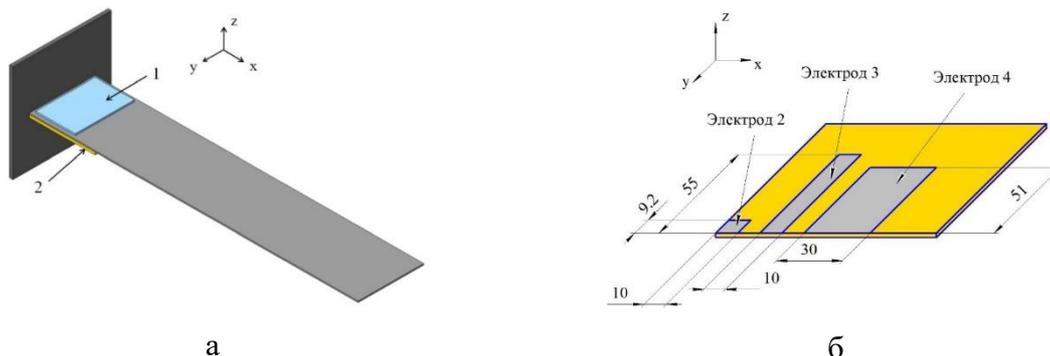


Рисунок 6 — Пластина с пьезоэлементом (1) и элементом из графенового композита (2) – (а), конфигурация электродированных поверхностей элемента (2) – (б)

На основе результатов численного моделирования были найдены значения сопротивлений  $R_1^{opt} = 210$  кОм,  $R_2^{opt} = 35$  кОм,  $R_3^{opt} = 14$  кОм, которые обеспечивают выполнение условия (21) соответственно для первой, второй и третьей мод колебаний. При наличии электропроводящего материала необходимо найти конфигурации электродированных поверхностей, которые при их попарном замыкании обеспечат необходимые значения сопротивлений. Рассмотрен вариант конфигурации электродов, при котором нижняя поверхность электродирована полностью (электрод 1), а на второй части — электродированы 3 участка (электрод 2, электрод 3 и электрод 4). При замыкании электродов 1 и 2 обеспечивается сопротивление  $R_1^{opt}$ , 1 и 3 —  $R_2^{opt}$ , 1 и 4 —  $R_3^{opt}$ . Для поиска конфигурации электродированных поверхностей решается задача электростатики. Один из вариантов этих поверхностей приведен на рис. 6б.

Для анализа эффективности использования в smart-системах резистивной функции графеновых композитов рассмотрены собственные и вынужденные установившиеся колебания для трех вариантов smart-системы: вариант 1 — учитываются только вязкоупругие свойства элемента из графенового композита; вариант 2 — графеновый композит — упругий и реализует функцию резистора; вариант 3 — графеновый композит — вязкоупругий и реализует функцию резистора. При упругом деформировании графеновый композит имеет сдвиговой и объемный модули  $G^R = 2.29 \cdot 10^8$  Па; объемный модуль  $B = 5.96 \cdot 10^8$  Па; а при вязкоупругом деформировании — комплексный модуль сдвига  $G^R = 2.29 \cdot 10^8$  Па,  $G^I = 5.73 \cdot 10^7$  Па и объемный модуль  $B = 5.96 \cdot 10^8$  Па.

Наиболее наглядно о диссипативных свойствах рассматриваемой пластины дает представление амплитудно-частотная характеристика перемещений при вынужденных установившихся колебаниях. Такие зависимости на рис. 7 приведены для свободного торца пластины в окрестности первого, второго и третьего резонансов при задании перемещений заземленного торца  $u_z = u_0 \sin pt$ . Приведенный пример демонстрирует возможность одновременного использования в smart-системах механических свойств электропроводящих материалов и их электрической

проводимости для реализации дополнительного диссипативного механизма.

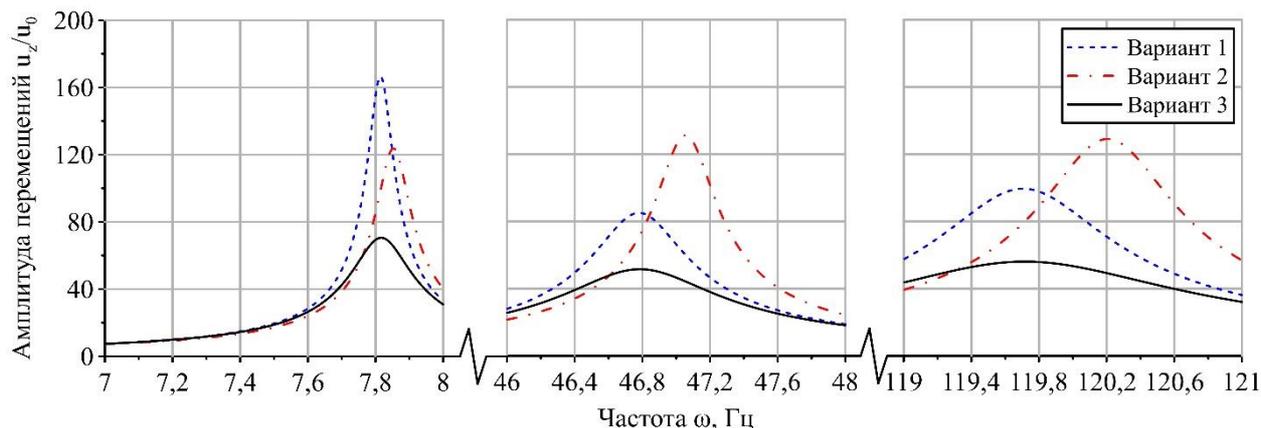


Рисунок 7 — Амплитудно-частотные характеристики для перемещений  $u_z$  свободного торца пластины в окрестности первого, второго и третьего резонансов изгибных мод колебаний

Анализ полученных результатов показывает, что использование свойств электрической проводимости графеновых композитов в smart-материалах, основанных на применении пьезоэлементов, дает дополнительные возможности при демпфировании колебаний.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Матвеевко В.П., Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлова Н.А. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 476-485.
2. Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлова Н.А., Юрлов М.А. Вариант мультимодального демпфирования колебаний электроупругих конструкций за счет соответствующего подбора параметров внешней электрической цепи // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2016. – Т.20, №3. – С. 475-495.
3. Oshmarin D., Sevodina N., Iurlov M., Iurlova N. A search for optimal parameters of resonance circuits ensuring damping of electroelastic structure vibrations based on the solution of natural vibration problem // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 208. – Art. id. № 012030.
4. Oshmarin D., Iurlov M. On location of piezoelectric element in a smart-structure: numerical investigation and experiment // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 208. – Art. id. № 012047.
5. Matveenko V.P., Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations // Int. Journal of Smart and Nano Materials. – 2018. – Vol. 9, № 2. – P. 135-149.

6. Oshmarin D., Sevodina N., Iurlov M., Iurlova N. Possibility of tuning shunt circuits for multimodal damping of vibrations of structure with piezoelectric element // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2019. – Vol. 49. – P. 800-813.
7. Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data // *Int. Journal of Smart and Nano Materials*. – 2019. – Vol. 10, № 2. – P.156-176.
8. Iurlova N.A., Sevodina N.V., Oshmarin D.A., Iurlov M.A. Possibility of multimodal vibration damping using a single piezoelectric element shunted with an RL-circuit // *AIP Conference Proceedings*. – 2019. – Vol. 2176. – Art. id. № 040010.
9. Юрлова Н.А., Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлов М.А. Численный алгоритм поиска компоновок электроупругих тел с внешними электрическими цепями для получения наилучших демпфирующих характеристик // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2020. – №3. – С. 108-124.
10. Матвеев В.П., Ошмарин Д.А., Юрлова Н.А. Использование графеновых композитов для дополнительного демпфирования колебаний smart-структур на основе пьезоэлементов // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. – 2020. – Т. 491, № 1. – С.18-23.
11. Матвеев В.П., Ошмарин Д.А., Юрлова Н.А. Использование электропроводящих композиционных материалов для дополнительного демпфирования смарт-систем на основе пьезоэлементов // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2021. – Т. 62, № 5. – С.45-57.