

На правах рукописи



**Дьякова Вероника Вадимовна**

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ  
ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ  
ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2020

Работа выполнена на кафедре физики и технологии Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет (ФГБОУ ВО ПГПУ), г. Пермь.

Научный руководитель: **Козлов Виктор Геннадьевич**, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Калиниченко Владимир Анатольевич**, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник ФГБУН Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, г. Москва.

**Мизев Алексей Иванович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией гидродинамической устойчивости ФГБУН Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН), г. Пермь.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.

Защита состоится **3 декабря 2020 г.** в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: [www.icmm.ru](http://www.icmm.ru).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » октября 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, доцент

 / А.Л. Зуев

## **Общая характеристика работы**

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** Динамика многофазных систем в быстро осциллирующих силовых полях является одним из ключевых направлений развития механики. В условиях колебательного воздействия в жидкостях и сыпучих материалах возникают новые гидродинамические эффекты. Например, осредненные потоки в жидкостях, рельеф на границе раздела между жидкостью и сыпучей средой и др.

Жидкость и сыпучая среда, находящиеся в равномерно или неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре, одновременно вращаются и колеблются вокруг оси вращения. Вследствие совместного действия вращения и колебаний в жидкости и сыпучей среде могут возникать новые эффекты. Известно, что либрации генерируют осредненные потоки в жидкостях, а также могут провоцировать возникновение центробежной неустойчивости. Эти результаты представляют интерес для астрофизики, так как многие астрономические тела (например, планеты и их спутники) либрируют вследствие гравитационного взаимодействия, и такое движение позволяет судить о наличии или отсутствии у исследуемого небесного тела подземных океанов или жидкого ядра. Многообразие явлений, в которых жидкость и сыпучая среда вращаются и совершают колебания, в настоящий момент слабо изучено.

**Целью диссертационной работы** является экспериментальное изучение динамики жидкости и тяжелой сыпучей среды в равномерно и неравномерно вращающемся горизонтальном цилиндре. Для достижения поставленной цели в ходе экспериментов решены следующие **задачи**:

1. В равномерно вращающемся горизонтальном цилиндре, частично заполненном жидкостью и сыпучей средой:

- определены пороги центрифугирования и обрушения кольцевых слоев жидкости и сыпучей среды, возбуждения бегущих азимутальных волн на свободной поверхности жидкости, образования квазистационарного рельефа на поверхности сыпучей среды;
- исследованы волновые процессы, осцилляционное движение жидкости и осредненные азимутальные течения в жидкости;
- изучена динамика пространственно - периодического рельефа на поверхности сыпучей среды.

2. В неравномерно вращающемся (либрирующем) горизонтальном цилиндре, заполненном жидкостью и сыпучей средой:

- изучены условия возникновения пространственно - периодического рельефа;
- определены параметры, влияющие на пространственный период квазистационарного рельефа;
- изучена скорость азимутального дрейфа регулярного рельефа.

**Научная новизна** состоит в систематическом экспериментальном исследовании процессов, происходящих в равномерно и неравномерно вращающемся горизонтальном цилиндре, в зависимости от скорости вращения, размеров цилиндра, объема и вязкости жидкости, диаметра частиц и массы сыпучей среды. Впервые экспериментально обнаружен и исследован новый гидродинамический эффект –

появление пространственно - периодического рельефа на поверхности сыпучей среды в виде вытянутых вдоль оси вращения холмов.

*В равномерно вращающемся цилиндре* впервые экспериментально обнаружены и изучены бегущие на свободной поверхности жидкости волны с различными азимутальными волновыми числами.

Впервые экспериментально изучено колебательное и осредненное азимутальное движение жидкости. Показано, что осредненное течение является результатом фазовой неоднородности колебательного движения вблизи стенки цилиндра, вызванной действием силы тяжести.

Проведено детальное исследование пространственного периода рельефа в зависимости от количества и вязкости жидкости, массы сыпучей среды и скорости вращения полости; изучено влияние волновых процессов на величину пространственного периода рельефа и на его временную динамику. Результаты исследований обобщены на плоскости управляющих безразмерных параметров.

*В неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре* впервые изучена устойчивость границы раздела между жидкостью и сыпучей средой. Обнаружен новый эффект – возникновение регулярного квазистационарного рельефа в форме вытянутых вдоль оси вращения холмов. Изучена временная динамика рельефа и обнаружено, что холмы непрерывно дрейфуют в азимутальном направлении. Показано, что пространственный период рельефа главным образом определяется амплитудой колебаний жидкости вблизи межфазной границы.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Изучение нелинейной динамики многофазных систем в осциллирующих силовых полях является необходимой основой для понимания новых механизмов управления движением жидкости. Влияние волн на поверхности жидкости на сыпучую среду во вращающейся полости имеет схожую природу с действием набегающей волны на песок в неглубоких водоемах. Формирование песчаного рельефа в прибрежных зонах и их последующее перемещение способно оказывать влияние на созданную человеком на дне водоемов инфраструктуру (кабели связи и электрические кабели, трубопроводы) и придонные экосистемы. Изучение данной задачи носит как прикладной, так и фундаментальный характер.

Поведение гранулированных материалов представляет большой практический интерес в связи с их широким применением в различных областях: в минеральной, фармацевтической, керамической, строительной и пищевой промышленности. Устройства, основанные на движении сыпучих сред во вращающихся вокруг своей оси полостях, применяются для выполнения сушки, нагрева, химических реакций, смешивания и сегрегации различных видов сыпучих материалов. Таким образом, поведение жидкости и сыпучей среды в горизонтальном вращающемся цилиндре представляет значительный научный и практический интерес.

**Методология и методы исследования.** Для решения поставленных задач используются апробированные экспериментальные методики, современное экспериментальное оборудование и технологии для контроля и последующей обработки экспериментальных данных.

Экспериментальное исследование динамики жидкости и сыпучей среды в равномерно вращающемся горизонтальном цилиндре на начальном этапе

заключается в определении условий возникновения азимутальных волн на свободной поверхности жидкости, образования квазистационарного рельефа на поверхности сыпучей среды. Фоторегистрация границы раздела между жидкостью и газом, жидкостью и сыпучей средой позволяет определить порог возбуждения бегущих азимутальных волн и возникновения рельефа на поверхности сыпучей среды. Фоторегистрация межфазных границ проводится фотокамерой Nikon D40.

Структура и интенсивность колебательного и осредненного движения жидкости, а также временная динамика квазистационарного рельефа изучаются с использованием скоростной видеокамеры. Анализ полученных файлов с использованием специализированных программ позволяет детально изучить пространственно-временную динамику жидкости и сыпучей среды. Аналогичным образом изучается динамика сыпучей среды в неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Результаты исследования порогов центрифугирования и обрушения жидкости и сыпучей среды, возбуждения бегущих азимутальных волн на свободной поверхности жидкости, образования квазистационарного рельефа на поверхности сыпучей среды в равномерно вращающемся горизонтальном цилиндре, частично заполненном жидкостью и сыпучей средой.

2. Результаты изучения колебательного движения и осредненного азимутального течения жидкости в равномерно вращающемся горизонтальном цилиндре.

3. Результаты исследования пространственного периода рельефа и его временной динамики на поверхности сыпучей среды в равномерно вращающемся горизонтальном цилиндре.

4. Результаты изучения условий возникновения пространственно-периодического рельефа в неравномерно вращающемся (либрирующем) горизонтальном цилиндре, заполненном жидкостью и сыпучей средой.

5. Результаты изучения азимутального размера регулярных холмов на межфазной границе в либрирующем горизонтальном цилиндре.

**Достоверность результатов** обеспечивается использованием апробированных современных методик измерения и обработки данных, детальным изучением, комплексным, экспериментальным и теоретическим, рассмотрением проблемы и сравнением с данными других авторов.

**Апробация результатов.** Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях: Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2013, 2015, 2017, 2019), Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях» (Санкт-Петербург, 2013), Пермские научные гидродинамические чтения (Пермь, 2013, 2016), Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Москва, 2014, 2016, 2020), Международная конференция «Актуальные проблемы механики» (С. Петербург, 2014), V Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 2014), SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures (Кембридж, Великобритания, 2014), 67th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics (Сан-Франциско, США, 2014), Международная научная

школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2014, 2016), Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные задачи механики сплошных сред» (Пермь, 2014), XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015), 66th International Astronautical Congress (Иерусалим, Израиль, 2015), 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Монреаль, Канада, 2016).

**Публикации.** Полученные результаты опубликованы в 27 работах, включая 4 статьи в журналах из списка ВАК (индексированы в WOS) [1–4], 5 статей в сборниках научных статей (индексированы в РИНЦ) [5–9], 5 – в трудах конференций [10–14] (индексированы в РИНЦ) и 13 тезисов докладов.

**Личный вклад.** Экспериментальные исследования и обработка результатов выполнены диссертантом лично, обсуждение и анализ результатов проведены совместно с научным руководителем и соавторами.

**Содержание работы.** Основной текст работы состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Диссертация содержит 118 страниц текста, включающих в себя 54 рисунка и список литературы из 129 источников.

Во **введении** представлен обзор литературы по теме диссертации, обозначены цель и задачи исследования, ее новизна, научная и практическая значимость, а также приведено краткое содержание диссертации.

**Первая глава** включает в себя результаты экспериментального исследования динамики трехфазной системы (сыпучая среда – жидкость – газ) в быстро вращающемся горизонтальном цилиндре.

В **п.1.1.** приведено описание экспериментальной установки и методики исследований. Эксперименты проводятся с оргстеклянными цилиндрическими кюветами длиной  $L = 7.8$  и  $9.1$  см и внутренним диаметром  $D = 12.6$  и  $14.4$  см соответственно. Цилиндр с жидкостью и сыпучей средой приводится во вращение с помощью шагового двигателя (скорость вращения  $f$  изменяется от 0 до  $15.0$  об/с).

В качестве рабочей жидкости используются водоглицериновые растворы (кинематическая вязкость  $\nu = 1 - 30$  сСт), промышленное масло И-5А ( $\nu = 5.0$  сСт) и силиконовое масло ПМС-20 ( $\nu = 20.0$  сСт). Количество жидкости характеризуется относительным наполнением  $q = V/V_0$ , где  $V$  – объем жидкости,  $V_0$  – объем полости. В экспериментах  $q$  варьируется от 0.10 до 0.60. Сыпучая среда представляет собой сферические стеклянные частицы, средний диаметр которых  $d = 0.2 \pm 15\%$  мм. В экспериментах толщина кольцевого слоя сыпучей среды  $h_0$  изменяется в диапазоне от 0.15 до 0.62 см. Плотность частиц сыпучей среды составляет  $\rho = 2.5$  г/см<sup>3</sup>.

Порядок проведения экспериментов следующий. В отсутствие вращения жидкость и тяжелая сыпучая среда находятся в нижней части полости. При медленном вращении жидкость и сыпучая среда частично увлекаются вращающейся цилиндрической стенкой полости. Увеличение скорости вращения приводит к переходу жидкости и сыпучей среды в центрифугированное состояние, при этом граница раздела между фазами осесимметричная. При понижении скорости вращения на свободной поверхности жидкости возбуждаются бегущие азимутальные волны. Дальнейшее понижение скорости вращения приводит к тому, что на поверхности сыпучей среды пороговым образом возникает регулярный

рельеф. При плавном уменьшении скорости вращения рельеф продолжает существовать вплоть до обрушения центрифугированного слоя жидкости и сыпучей среды. Наблюдения за жидкостью и сыпучей средой проводятся в естественном или стробоскопическом освещении.

В п. 1.2. представлены результаты измерения критических скоростей вращения, при которых наблюдаются центрифугирование и обрушение жидкости и сыпучей среды, возбуждение бегущих азимутальных волн и образование квазистационарного рельефа на поверхности сыпучей среды, в зависимости от массы сыпучей среды, количества и вязкости жидкости и размеров полости. Динамика жидкости и сыпучей среды во вращающемся горизонтальном цилиндре определяется отношением силы тяжести и центробежной силы инерции [Phillips O.M. Centrifugal waves. 1960]:  $\Gamma = g/\Omega^2 a$  (здесь  $\Omega = 2\pi f$  – угловая скорость вращения,  $a$  – радиус свободной поверхности жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения). При медленном вращении цилиндра, когда действие силы тяжести преобладает над действием центробежной силы инерции, жидкость и сыпучая среда находятся в нижней части цилиндра, и только их малая часть увлекается вращающейся стенкой. В быстро вращающемся цилиндре центробежная сила инерции становится доминирующей ( $\Gamma \ll 1$ ), жидкость и сыпучая среда образуют кольцевые слои вблизи цилиндрической стенки и совершают вращение, близкое к твердотельному. Отклонение от твердотельного вращения определяется действием силы тяжести: горизонтальный воздушный столб внутри цилиндра смещен вниз относительно оси вращения, так что толщина центрифугированного слоя жидкости зависит от азимутальной координаты. Неоднородность толщины центрифугированного слоя жидкости вызывает радиальные и азимутальные колебания жидкости относительно вращающейся системы отсчета. Частота вынужденных колебаний жидкости численно равна скорости вращения цилиндра, а амплитуда определяется безразмерным ускорением  $\Gamma$ . При понижении скорости вращения на свободной поверхности жидкости резонансным образом возбуждаются бегущие в лабораторной системе отсчета азимутальные волны. Дальнейшее понижение скорости вращения приводит к увеличению интенсивности колебаний жидкости, что вызывает подвижность частиц поверхностного слоя сыпучей среды и появление пространственно - периодического рельефа.

Безразмерное ускорение  $\Gamma$  в пороге центрифугирования монотонно убывает с увеличением объема жидкости в изученном диапазоне относительного наполнения  $q$  (рис. 1, точки 1). Обнаружено, что рельеф образуется, как правило, при наличии бегущих азимутальных волн на свободной поверхности жидкости: на плоскости управляющих параметров  $q, \Gamma$  граница устойчивости к появлению рельефа (точки 3) находится выше порога возбуждения азимутальных волн (точки 2) или совпадает с ним. Граница устойчивости центрифугированного слоя жидкости немонотонная (точки 4): минимум устойчивости наблюдается при наличии интенсивных колебаний на свободной поверхности жидкости. И наоборот, устойчивость центрифугированного слоя жидкости высокая, когда волны возбуждаются при медленном вращении полости, и их интенсивность сравнительно невысокая. Штриховая линия на рис. 1 соответствует теоретическому значению  $\Gamma = 1/3$  в пороге устойчивости центрифугированного слоя маловязкой жидкости в поле силы тяжести

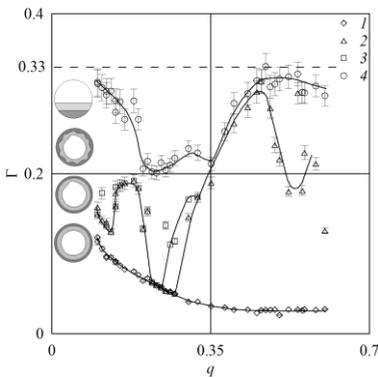


Рис. 1. Зависимость безразмерного ускорения  $\Gamma$  от относительного наполнения полости  $q$  ( $R = 6.3$  см,  $m = 125$  г,  $h_0 = 0.27$  см,  $\nu = 1$  сСт)

отсчета такое распределение жидкости соответствует распространению двумерной азимутальной волны в направлении, противоположном направлению вращения со скоростью, равной скорости вращения цилиндра  $\Omega$ . Бегущая азимутальная волна генерирует в жидкости вынужденные колебания. В вязком пограничном слое вблизи кольцевого слоя сыпучей среды такое неоднородное по фазе колебательное движение жидкости генерирует среднюю массовую силу, приводящую жидкость в осредненное азимутальное движение в направлении распространения волны. Динамика жидкости изучается с использованием скоростной видеокамеры. Для измерения скорости свободной поверхности жидкости в нее добавляются легкие маркеры (диаметр  $d \approx 1$  мм, плотность  $\rho \approx 0.02$  г/см<sup>3</sup>). Для изучения динамики жидкости вблизи поверхности сыпучей среды в жидкость добавляются тяжелые маркеры ( $d \approx 1$  мм,  $\rho \approx 1.5$  г/см<sup>3</sup>).

На рис. 2 представлены результаты измерения положения легкого маркера на свободной поверхности жидкости относительно вращающегося цилиндра в течение нескольких периодов обращения. Видно, что жидкость совершает колебания, амплитуда которых остается неизменной при фиксированной угловой скорости вращения  $\Omega$ , при этом циклическая частота колебаний жидкости  $\Omega_{osc} = \Omega$ . Кроме колебательного движения жидкость совершает среднее азимутальное движение в

в бесконечно длинном горизонтальном цилиндре в отсутствие волн на поверхности жидкости [Phillips O.M. Centrifugal waves. 1960]. Как следствие, экспериментальные и теоретические данные хорошо согласуются в области наполнений, когда интенсивность поверхностных волн мала, и они возбуждаются вблизи порога обрушения центрифугированного слоя.

В п. 1.3. изучается динамика кольцевого слоя маловязкой жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре, в котором вследствие действия силы тяжести кольцевой слой жидкости оказывается неоднородным по толщине: в лабораторной системе отсчета воздушный цилиндр смещен по отношению к оси вращения. Во вращающейся системе

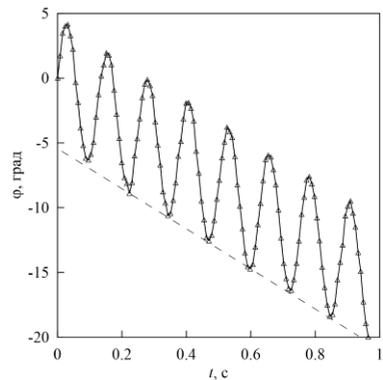


Рис. 2. Угловое перемещение  $\phi$  легкого маркера на свободной поверхности жидкости относительно вращающейся полости в зависимости от времени:  $q = 0.51$ ,  $\Omega = 50.2$  рад/с,  $\nu = 20$  сСт,  $m = 125$  г,  $h_0 = 0.27$  см,  $R = 6.3$  см

направлении, противоположном вращению цилиндра, – угол между положениями маркера и цилиндра  $\varphi$  уменьшается с течением времени.

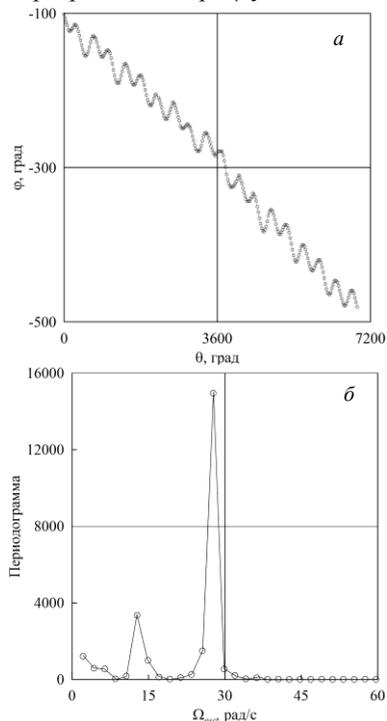


Рис. 3. Угловое перемещение  $\varphi$  тяжелой частицы вблизи сыпучей среды относительно вращающейся полости в зависимости от угла поворота полости  $\theta$  (а) и результаты спектрального анализа (б):  $q = 0.17$ ,  $\Omega = 28.7$  рад/с,  $\nu = 2.8$  сСт,  $m = 250$  г,  $h_0 = 0.54$  см,  $R = 6.3$  см, азимутальное волновое число  $l = 3$

объема и вязкости жидкости на свободной поверхности жидкости обнаружены волны с азимутальными волновыми числами  $l = 1 - 5$ . Такие волны генерируют в жидкости колебания, частота которых отлична от скорости вращения цилиндра и определяется фазовой скоростью распространения волны. На рис. 3 а показана зависимость азимутальной координаты тяжелого маркера в системе отсчета полости от угла поворота цилиндра в условиях, когда по свободной поверхности жидкости распространяется азимутальная волна.

Спектральный анализ показывает, что колебательное движение жидкости является суперпозицией двух гармонических колебаний (рис. 3 б): первый пик соответствует вынужденным колебаниям с циклической частотой, равной угловой скорости вращения жидкости  $\Omega_{osc1} = \Omega_l$ , где  $\Omega_l \equiv \Omega - |\Delta\Omega|$  – угловая скорость

Спектральный анализ данных показывает, что колебания жидкости происходят с единственной частотой, близкой к скорости вращения цилиндра. Незначительное отклонение частоты осцилляций  $\Omega_{osc}$  от угловой скорости вращения  $\Omega$  обусловлено наличием осредненного азимутального течения, вследствие чего колебания жидкости происходят с частотой  $\Omega_{osc} = \Omega + \Delta\Omega$  ( $\Delta\Omega \ll \Omega$  – угловая скорость осредненного азимутального движения жидкости). Возникновение осредненного движения обусловлено действием переменной в системе отсчета вращающегося цилиндра силы тяжести. Во вращающейся системе отсчета изменение толщины кольцевого слоя жидкости можно представить как волну, бегущую в направлении, противоположном направлению вращения цилиндра, и генерирующую среднее течение в направлении своего распространения. В рассматриваемой задаче волна распространяется против вращения цилиндра, так что скорость осредненного азимутального течения жидкости  $\Delta\Omega < 0$ .

При медленном вращении полости, когда возмущающее действие силы тяжести велико, на поверхности жидкости резонансным образом возбуждаются бегущие азимутальные волны. В зависимости от скорости вращения полости,

вращения жидкости в лабораторной системе отсчета. Второй пик показывает, как бегущая азимутальная волна влияет на колебательное движение жидкости: частота  $\Omega_{osc2}$  равна фазовой скорости волны относительно лабораторной системы отсчета  $\Omega_w$  (рис. 3 б).

Обобщенные результаты измерения скорости колебательного движения в отсутствие инерционных волн хорошо согласуются между собой на плоскости безразмерных параметров  $\Gamma c (1+c^2)$ ,  $v_{osc}/\Omega R$  (рис. 4 а), где  $c \equiv a/R = (1-q)^{1/2}$  – безразмерный радиус свободной поверхности жидкости. Полученные данные хорошо согласуются с предсказаниями теории (сплошная линия на рис. 4 а), согласно которой в длинном цилиндре скорость азимутального колебательного движения маловязкой жидкости вблизи свободной поверхности определяется по закону  $v_{osc}/\Omega R = 1/2 \Gamma c (1+c^2) \cos \theta$  [Phillips O.M. Centrifugal waves. 1960].

Бегущие в жидкости волны генерируют осредненное азимутальное движение в направлении своего распространения. Согласно [Batchelor G.K. Introduction to Fluid Dynamics. 1967] скорость осредненного течения, генерируемого бегущей по свободной поверхности жидкости волной, за пределами вязкого пограничного слоя Стокса может быть вычислена по формуле:  $v_{mean} = 5/4 v_{osc}^2/u_{wave}$ , где  $v_{osc}$  – скорость колебательного движения жидкости,  $u_{wave}$  – скорость бегущей по поверхности жидкости волны. Так как угловая скорость распространения волны равна угловой скорости вращения цилиндра  $u_{wave} = \Omega a$ , то в приближении малых наполнений ( $c \rightarrow 1$ ) скорость азимутального течения жидкости определяется выражением  $v_{mean}/\Omega R = 5/4 \Gamma^2$ .

Обобщенные результаты измерения скорости азимутального течения жидкости на свободной поверхности представлены на рис. 4 б: экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями [Batchelor G.K. Introduction to Fluid Dynamics. 1967]. Осредненное азимутальное течение жидкости генерируется не только в вязком пограничном слое вблизи кольцевого слоя сыпучей среды, но и в пограничном слое вблизи свободной границы. Как следует из экспериментальных

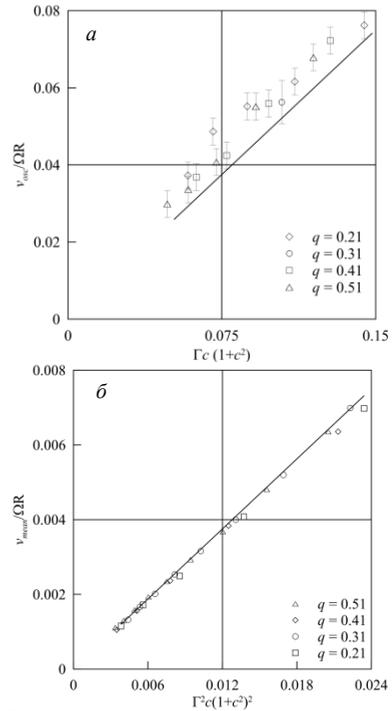


Рис. 4. Амплитуда скорости колебательного движения жидкости вблизи свободной поверхности  $v_{osc}/\Omega R$  в зависимости от безразмерного параметра  $\Gamma c(1+c^2)$ ;  $v = 20$  сСт,  $R = 6.3$  см (а). Скорость осредненного течения жидкости вблизи свободной поверхности в зависимости от безразмерного параметра  $\Gamma^2 c(1+c^2)^2$  для различных наполнений полости  $R = 6.3$  см (б)

результатов, вклад в осредненное азимутальное течение пограничного слоя вблизи свободной границы несущественный.

Кроме волны, неподвижной в лабораторной системе отсчета, в экспериментах обнаружены бегущие азимутальные волны. В п. 1.4. обсуждаются результаты изучения бегущих азимутальных волн с азимутальными волновыми числами  $l = 1 - 5$ . В [Phillips O.M. Centrifugal waves. 1960] получена зависимость безразмерной частоты колебаний жидкости  $n = \Omega_{osc}/\Omega_l$  от безразмерной координаты свободной поверхности жидкости  $c = a/R$  для бегущих азимутальных волн, распространяющихся в маловязкой жидкости в бесконечно длинном горизонтальном цилиндре:

$$n^2(1+c^2l)+2n\{(1+l)-(1-l)c^2l\}+l\{(1+l)-(1-l)c^2l\}=0. \quad (1)$$

На рис. 5 представлены результаты измерений  $n$  в зависимости от относительного наполнения  $q^* = V_l/V_s$  ( $V_l$  – объем кольцевого слоя чистой жидкости,  $V_s$  – объем цилиндра за вычетом объема, занимаемого кольцевым слоем сыпучей среды) в пороге возбуждения бегущих волн: экспериментальные результаты хорошо согласуются с предсказаниями теории.

**Во второй главе** изучается динамика границы между жидкостью и сыпучей средой в равномерно вращающемся горизонтальном цилиндре. В п. 2.1. показано, что пространственный период регулярного квазистационарного рельефа увеличивается при уменьшении скорости вращения полости. Скорость вращения, при которой происходит формирование рельефа, зависит от вязкости жидкости. В экспериментах с маловязкими жидкостями рельеф возникает при более высоких скоростях вращения, при этом регулярный рельеф наблюдается в широком диапазоне скоростей вращения; увеличение вязкости жидкости приводит к сужению области существования пространственных структур. С увеличением вязкости размер холмов уменьшается.

В п. 2.2. приведены результаты изучения временной динамики рельефа. Показано, что регулярный рельеф в виде вытянутых вдоль оси вращения холмов, возникающий в пороге развития неустойчивости, сохраняет свои форму и размер в течение длительного времени (рис. 6). В надкритической области холмы на поверхности сыпучей среды непрерывно эволюционируют. Рельеф сохраняет свою форму в течение нескольких минут и затем становится нерегулярным. Квазистационарный рельеф не остается неподвижным относительно вращающегося цилиндра – в экспериментах наблюдается азимутальная миграция холмов. Временная эволюция пространственного рельефа существенным образом зависит от интенсивности колебаний жидкости.

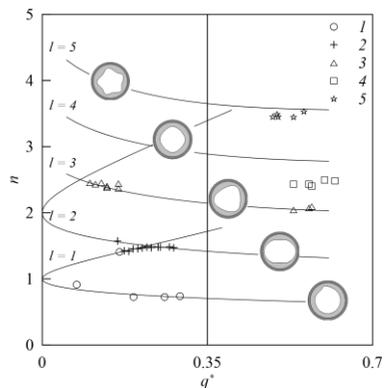


Рис. 5. Зависимость безразмерной частоты колебаний жидкости от относительного наполнения полости; точки 1 – 5 соответствуют волнам с азимутальным числом  $l = 1 - 5$ ; сплошные линии – результаты расчетов по формуле (1)

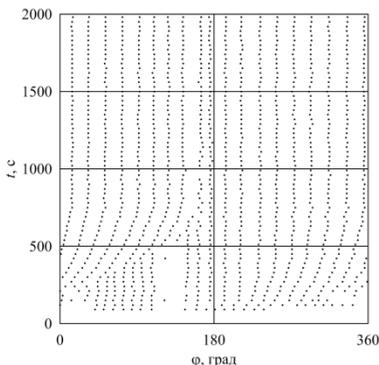


Рис. 6. Эволюция рельефа на границе раздела между жидкостью и сыпучей средой: точки соответствуют положению впадин на поверхности сыпучей среды;  $q = 0.216$ ,  $R = 6.3$  см,  $m = 250$  г,  $h_0 = 0.54$  см,  $v = 1.4$  сСт,  $\Omega = 35.6$  рад/с

симметричными склонами, сохраняющие свою форму и положение в течение длительного промежутка времени. Увеличение ускорения  $\Gamma$  приводит к интенсификации осредненных азимутальных потоков в жидкости: дюны мигрируют в направлении осредненного азимутального течения.

В **третьей главе** изучается динамика сыпучей среды в заполненном жидкостью горизонтальном цилиндре при его неравномерном вращении. Колебания цилиндра вокруг оси вращения на фоне вращения вызывают азимутальные колебания жидкости относительно стенок цилиндра. Наличие осциллирующих потоков в жидкости вблизи слоя сыпучей среды приводит к формированию пространственно - периодического рельефа на межфазной границе.

В п. 3.1. приведено подробное описание экспериментальной установки и методики проведения экспериментов. Эксперименты проводятся с цилиндрическими кюветами из плексигласа длиной  $L = 7.8, 2.2$  и  $10.2$  см и внутренним диаметром  $D = 12.6, 14.4$  и  $5.2$  см соответственно. В качестве рабочей жидкости используются водоглицериновые растворы различной кинематической вязкости ( $v = 1 - 16$  сСт). Сыпучая среда представляет собой два набора сферических стеклянных частиц, средний диаметр которых  $d_1 = 0.20 \pm 15\%$  мм,  $d_2 = 0.10 \pm 15\%$  мм. В экспериментах с цилиндрами длиной  $L = 2.2$  и  $7.8$  см толщина центрифугированного слоя сыпучей среды  $h_0 = 0.55$  см. В экспериментах с цилиндром длиной  $L = 10.2$  см толщина  $h_0 = 0.20$  см. Плотность частиц сыпучей среды составляет  $\rho = 2.5$  г/см<sup>3</sup>.

Неравномерное вращение цилиндра описывается уравнением  $\Omega(t) = \Omega_r [1 + \varepsilon \cos(\Omega_L t)]$ , где  $\Omega_r = 2\pi f_r$  – средняя угловая скорость вращения,  $\Omega_L = 2\pi f_L$  – циклическая частота либраций,  $\varepsilon = \varphi_0 \Omega_L / \Omega_r$  – амплитуда модуляции скорости вращения. Средняя угловая скорость вращения полости варьируется в диапазоне  $\Omega_r = 25.0 - 75.4$  об/с, частота либраций  $\Omega_L$  изменяется от  $1.5$  до  $144.5$  с<sup>-1</sup>, амплитуда либраций варьируется в пределах  $5^\circ \leq \varphi_0 \leq 180^\circ$ . В случае, когда скорость вращения больше удвоенной частоты либраций, в полости распространяются инерционные

Проведенный в п. 2.3. анализ показывает, что динамика жидкости существенным образом влияет на эволюцию холмов. Интенсивные колебания на границе между жидкостью и сыпучей средой вызывают подвижность частиц верхнего слоя сыпучей среды; подвижные частицы формируют пространственно – периодический рельеф на поверхности сыпучей среды. Согласно наблюдениям, пространственный рельеф возникает, как правило, при наличии бегущей по свободной поверхности жидкости азимутальной волны. Если ускорение  $\Gamma$  мало, то скорость азимутального движения невелика, и эволюция регулярного рельефа определяется только колебательным движением жидкости. В таком случае в экспериментах наблюдаются холмы с

волны (п. 3.2.), которые являются источником колебательного движения и осредненных течений. Последние, в свою очередь, оказывают влияние и на порог возникновения рельефа на поверхности сыпучей среды, и на его временную и надкритическую динамику. Инерционные волны возбуждаются в местах контакта торцевых стенок и поверхности сыпучей среды и распространяются в объем жидкости вдоль характеристических поверхностей в форме конусов. Направление распространения инерционных волн определяется безразмерной частотой либраций  $f = \Omega_L / \Omega_r$ . В экспериментах с сыпучей средой в относительно длинном цилиндре ( $L/D = 1.96$ ), когда инерционные волны многократно отражаются от поверхности сыпучей среды, возникающий рельеф приобретает не только азимутальную периодичность, но и осевую. С целью исключения влияния инерционных волн, изучение устойчивости межфазной границы в либрирующем цилиндре проведено преимущественно с использованием коротких цилиндров ( $L/D \approx 0.15$  и  $0.62$ ). В такой геометрии и в диапазоне  $f \leq 1$  первые отражения инерционных волн происходят от торцевых стенок цилиндра и не оказывают существенного влияния на динамику сыпучей среды.

В п. 3.3. показано, что изначально осесимметричная граница раздела между жидкостью и сыпучей средой пороговым образом теряет устойчивость к появлению регулярного квазистационарного рельефа в форме холмов, вытянутых вдоль оси вращения.

В быстро вращающемся цилиндре, когда сыпучая среда равномерным слоем покрывает цилиндрическую стенку, жидкость занимает положение в центре цилиндра и совершает практически твердотельное вращение. В экспериментах со средней скоростью вращения полости  $\Omega_r$  и частотой либраций  $\Omega_L$  обнаружено, что изначально невозмущенная поверхность сыпучей среды становится неустойчивой к появлению рельефа при достижении критического значения амплитуды модуляции скорости вращения  $\varepsilon$  (рис. 7).

Начало движения частиц на поверхности сыпучей среды определяется отношением вязкой сдвиговой силы  $\rho_l v b \Omega_L d^2 / \delta$ , действующей на частицу диаметром  $d$  на межфазной границе ( $\rho_l$  – плотность жидкости,  $b$  – амплитуда колебаний жидкости,  $\delta = (2\nu / \Omega_L)^{1/2}$  – толщина слоя Стокса), и центробежной силы инерции  $(\rho_s - \rho_l) \Omega_r^2 R_s d^3$ , удерживающей частицу на месте ( $\rho_s$  – плотность частиц,  $R_s$  – расстояние от центра полости до поверхности сыпучей среды). Отношение этих сил характеризуется числом Шильдса (Shields number):

$$\Theta = v b \Omega_L / ((\rho - 1) \Omega_r^2 R_s d \delta),$$

где  $\rho = \rho_s / \rho_l$  – отношение плотности частиц сыпучей среды и плотности жидкости.

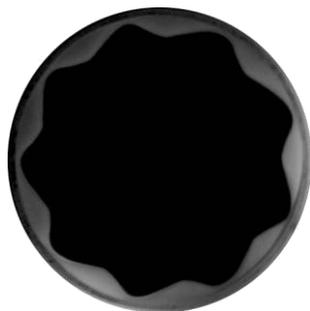


Рис. 7. Фотография границы раздела между жидкостью и сыпучей средой в горизонтальном цилиндре при неравномерном вращении полости:  $R = 7.2$  см,  $L = 2.2$  см,  $v = 9$  сСт,  $d = 0.2$  мм,  $\Omega_r = 31.4$  рад/с,  $\Omega_L = 12.56$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon = 0.20$

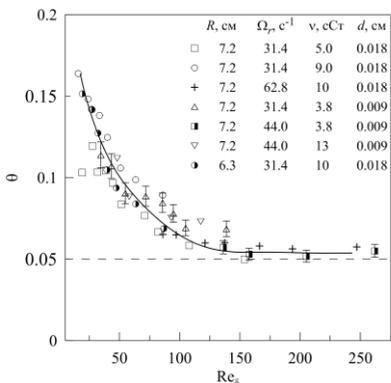


Рис. 8. Пороговая кривая устойчивости границы раздела жидкость - сыпучая среда в зависимости от числа Рейнольдса. Штриховая линия соответствует значению числа Шильдса  $\Theta = 0.05$

Временная динамика рельефа изучена в п. 3.4.: в начальной фазе своего существования длина и высота холмов увеличиваются и достигают квазистационарного значения. Одновременно увеличение амплитуды модуляции скорости вращения  $\varepsilon$  приводит к монотонному росту пространственного периода квазистационарного рельефа. Как правило, квазистационарные холмы имеют несимметричные склоны. Асимметрия может быть объяснена существованием осредненного азимутального движения жидкости относительно цилиндра.

Анализ экспериментальных данных о пространственном периоде рельефа показывает, что результаты измерений хорошо согласуются на плоскости безразмерных параметров  $b/R_s$ ,  $\lambda/b^*$ , где  $b^* \equiv b \Omega_L / \Omega_r$  (рис. 9). В области  $\varphi_0 = b/R_s > 1$  отношение  $\lambda/b^*$  не изменяется и приблизительно равно 2.5.

Изучение временной динамики регулярного рельефа показывает, что холмы непрерывно дрейфуют в азимутальном направлении. На рис. 10 показаны временные диаграммы положения вершин дюн относительно цилиндра при различных значениях амплитуды модуляции скорости вращения  $\varepsilon$ . В начале эксперимента число холмов велико, и они активно взаимодействуют друг с другом, объединяясь в более крупные холмы.

В настоящей работе проведены измерения пространственного периода рельефа  $\lambda$  в начальной фазе его формирования, и вычислено критическое значение волнового числа  $k_\delta = 2\pi\delta / \lambda = 0.56 \pm 0.10$ , что хорошо согласуется с данными теории квазистационарной неустойчивости.

На рис. 8. показана фазовая диаграмма устойчивости границы между жидкостью и сыпучей средой на плоскости безразмерных параметров  $Re_\delta$ ,  $\Theta$ , здесь  $Re_\delta = b\Omega_L\delta/\nu$ . В диапазоне значений числа Рейнольдса  $Re_\delta > 100$  экспериментальные значения числа Шильдса хорошо согласуются с известными данными  $\Theta = 0.05$  [Nielsen P. Coastal bottom boundary layers. 1992].

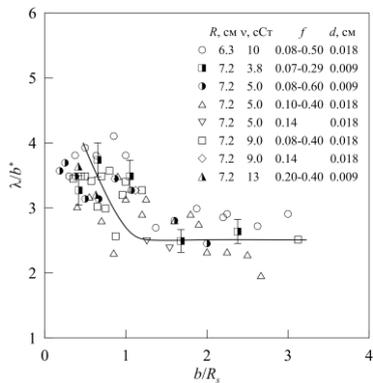


Рис. 9. Зависимость безразмерного пространственного периода рельефа  $\lambda/b^*$  от безразмерной амплитуды колебаний  $b/R_s$

По истечении некоторого времени количество дюн достигает равновесного значения. Одновременно становится заметным эффект азимутального движения (дрейфа) рельефа: холмы перемещаются в направлении вращения цилиндра (рис. 10 а), против вращения (рис. 10 б) или остаются неподвижными. Скорость дрейфа песчаных дюн неизменна в течение эксперимента и имеет характерную величину в несколько градусов в минуту.

Наиболее интригующий результат, полученный при изучении динамики рельефа, – отстающий дрейф дюн при интенсивных колебаниях жидкости, то есть при больших значениях ускорения  $b\Omega_L^2$  (рис. 11 а). Область существования прямого дрейфа (в направлении вращения полости) сужается с увеличением относительной частоты либраций  $f$ . На рис. 11 а показано, что при  $f = 0.20$  наблюдается только прямой дрейф дюн, при  $f = 0.50$  исключительно обратный дрейф. При промежуточных значениях  $f$  дрейф дюн возможен в обоих направлениях.

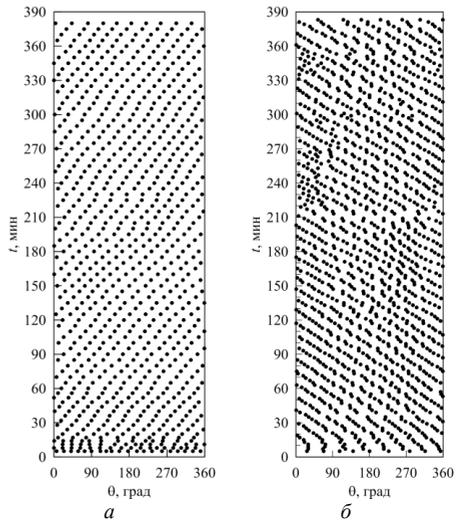
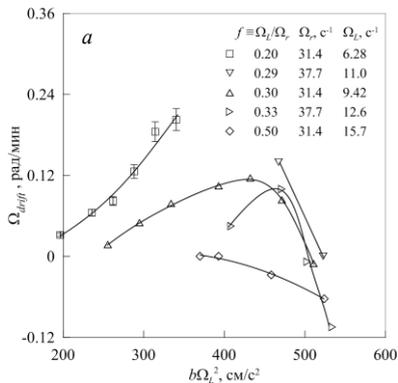


Рис. 10. Эволюция рельефа на границе раздела жидкость – сыпучая среда: точки соответствуют положению вершин дюн:  $R = 6.3$  см,  $L = 7.8$  см,  $\nu = 10$  сСт,  $d = 0.2$  мм,  $\Omega_r = 31.4$  рад/с,  $\Omega_L = 12.56$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon = 0.163$  (а) и  $0.24$  (б)

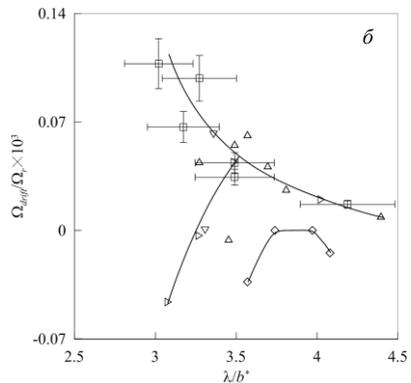


Рис. 11. Зависимость скорости дрейфа дюн  $\Omega_{drift}$  от амплитуды ускорения цилиндра  $b\Omega_L^2$  (а) и безразмерной скорости миграции дюн  $\Omega_{drift} / \Omega_r$  от безразмерного пространственного периода  $\lambda / b^*$  (б):  $d = 0.02$  см,  $R = 7.2$  см,  $\nu = 10$  сСт. Символы (б) соответствуют символам, приведенным на рис (а)

Экспериментальные данные, полученные в экспериментах с различными значениями  $f$ , удовлетворительно согласуются между собой на плоскости безразмерных параметров  $\lambda / b^*$ ,  $\Omega_{drift} / \Omega_r$  в области, где скорость дрейфа

увеличивается с уменьшением безразмерного пространственного периода  $\lambda/b^*$  (рис. 11 б).

Анализ результатов измерения азимутального размера  $\lambda_\varphi$  холмов, возникающих на поверхности сыпучей среды в равномерно (глава 2) и неравномерно (глава 3) вращающемся горизонтальном цилиндре, приведен в п. 3.5. В экспериментальной работе [Polezhaev D. The Geometry of Sand Ripples. 2020] обобщение результатов о размерах холмов в горизонтальном либрирующем цилиндре в широком диапазоне безразмерной частоты либраций  $0.1 < f < 3$  проводится в предположении, что угловой размер холмов  $\lambda_\varphi$  определяется исключительно амплитудой колебаний жидкости  $\varphi_0$ . Показано, что в экспериментах с толстыми слоями сыпучей среды, когда  $\lambda < h_0$ , угловой размер холмов изменяется по закону  $\lambda_\varphi = 0.75 \varphi_0^{1/2}$  (сплошная линия на рис. 12). Напротив, когда слой сыпучей среды тонкий, азимутальный размер холмов мало чувствителен к амплитуде колебаний и определяется главным образом величиной  $h_0$  (штриховая линия на рис. 12).

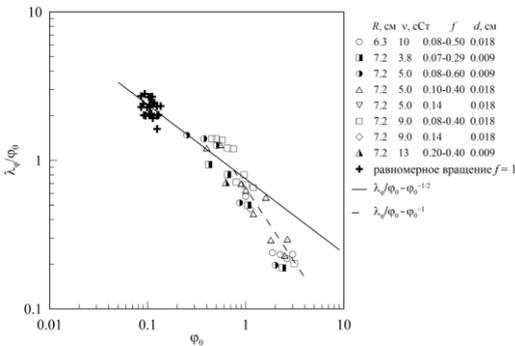


Рис. 12. Безразмерная азимутальная длина холмов  $\lambda_\varphi/\varphi_0$  в зависимости от угловой амплитуды колебаний жидкости вблизи поверхности сыпучей среды  $\varphi_0$  замедляется, так что  $\lambda_\varphi/\varphi_0 \sim \varphi_0^{-1}$ , то есть  $\lambda_\varphi = \text{const}$ . Предположительно, рост холмов в таких условиях ограничен количеством сыпучей среды.

Экспериментальные результаты измерения азимутального размера холмов, возникающих в равномерно вращающемся цилиндре вследствие действия силы тяжести (черные точки на рис. 12), хорошо согласуются с данными, полученными в неравномерно вращающемся цилиндре. Согласие экспериментальных данных свидетельствует о едином механизме формирования рельефа в равномерно и неравномерно вращающемся цилиндре.

## Заключение

**Итоги выполненного исследования.** В диссертационной работе проведено систематическое экспериментальное исследование динамики многофазной системы «тяжелая сыпучая среда – жидкость – газ» в равномерно и неравномерно вращающемся горизонтальном цилиндре. Исследование проведено в широком диапазоне скорости вращения, амплитуды и частоты либраций при варьировании размеров полости и относительного объема фаз, характеристик жидкости и сыпучей

Сравнение результатов, полученных при  $\varphi_0 < 1$  в главе 3 диссертации, с данными [Polezhaev D. The Geometry of Sand Ripples. 2020] показывает хорошее согласие – в указанной области значений угловой размер холмов  $\lambda_\varphi = 0.75 \varphi_0^{1/2}$  и не зависит от частоты колебаний жидкости. В области больших амплитуд колебаний жидкости ( $\varphi_0 > 1$ ) в экспериментах с относительно тонкими слоями сыпучей среды ( $h_0 < \lambda$ ) увеличение углового размера холмов с повышением  $\varphi_0$

среды. Результаты исследований обобщены в пространстве управляющих безразмерных параметров.

1. Изучена динамика жидкости и устойчивость границы раздела жидкости и сыпучей среды в быстро вращающемся горизонтальном цилиндре, содержащем трехфазную систему «сыпучая среда – жидкость – газ», в зависимости от скорости вращения, относительных объемов и свойств жидкости и сыпучей среды.

- Показано, что при понижении скорости вращения на свободной поверхности центрифугированного слоя жидкости пороговым образом развиваются бегущие азимутальные волны с различными волновыми числами, которые возбуждают вблизи поверхности сыпучей среды колебания жидкости, а также генерируют в жидкости осредненное азимутальное течение;

- обнаружено, что под действием азимутальных колебаний жидкости на поверхности сыпучей среды возникает квазистационарный рельеф в виде холмов, вытянутых вдоль оси вращения;

- впервые изучена пространственно - временная динамика рельефа, в том числе пространственный период рельефа; результаты исследования обобщены на плоскости управляющих безразмерных параметров.

2. Впервые изучена динамика сыпучей среды в неравномерно вращающемся (либрирующем) горизонтальном цилиндре, заполненном жидкостью и сыпучей средой, в зависимости от свойств жидкости и относительной длины цилиндра, размера частиц и относительного объема сыпучей среды, скорости вращения, амплитуды и частоты модуляции скорости вращения.

- Обнаружено, что под действием либраций на поверхности сыпучей среды образуется квазистационарный рельеф в виде холмов, вытянутых вдоль оси вращения;

- показано, что формирование рельефа начинается по достижении критического значения числа Шильдса, при расчете которого роль прижимной силы играет центробежная сила инерции;

- изучено влияние на сыпучую среду распространяющихся в жидкости инерционных волн, генерируемых в углах полости под действием либраций; показано, что в относительно длинных полостях инерционные волны генерируют осевую периодичность вытянутых вдоль оси вращения двумерных холмов;

- установлено, как азимутальный пространственный период регулярного рельефа зависит от толщины слоя сыпучей среды. В экспериментах, когда азимутальный размер холмов меньше толщины слоя сыпучей среды, пространственный период определяется только амплитудой колебаний жидкости, что качественно согласуется с данными о пространственном периоде песчаного рельефа в природных условиях и лабораторных экспериментах, в которых жидкость совершает тангенциальные колебания вблизи поверхности сыпучей среды. В «тонких» слоях сыпучей среды азимутальный размер холмов определяется толщиной сыпучей подложки;

- найдена зависимость безразмерного азимутального размера холмов от амплитуды колебаний, обобщающая результаты экспериментов при равномерном и модулированном вращении цилиндра. Показано, что полученная зависимость качественно отличается от известных результатов в случае

тангенциальных колебаний жидкости вблизи поверхности неподвижной сыпучей среды.

### **Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.**

Экспериментальные исследования, направленные на изучение фундаментальных процессов на границе между жидкостью и песчаной подложкой, способствуют развитию теории гидромеханики многофазных систем и гидромеханики вращающихся систем. Управление перемещением песка является актуальной научной и технической задачей в неглубоких акваториях (прибрежных морских зонах, водохранилищах), где волновые процессы в воде приводят к перемещению песчаной подложки и изменению морфологии дна, что может отразиться на созданной человеком инфраструктуре.

Особый интерес представляет дальнейшее теоретическое и экспериментальное исследование влияния инерционных волн на структурообразование в либрирующих полостях различной геометрии, а также нахождение параметров, управляющих миграцией пространственного рельефа. Варьирование формы, состава и материала сыпучих сред также может привести к новым интригующим результатам.

### **Публикации по теме диссертации**

1. Dyakova V., Kozlov V., Polezhaev D. Pattern formation inside a rotating cylinder partially filled with liquid and granular medium //Shock and vibration. – 2014. – Т. 2014.
2. Dyakova V., Polezhaev D. Oscillatory and steady flows in the annular fluid layer inside a rotating cylinder //Shock and Vibration. – 2016. – Т. 2016.
3. Dyakova V., Kozlov V., Polezhaev D. Oscillation-induced sand dunes in a liquid-filled rotating cylinder //Physical Review E. – 2016. – Т. 94. – №. 6. – С. 063109.
4. Subbotin S., Dyakova V. Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder //Microgravity Science and Technology. – 2018. – Т. 30. – №. 4. – С. 383 – 392.
5. Дьякова В.В., Полежаев Д.А. Экспериментальное изучение волновых процессов в системе сыпучая среда – жидкость – газ в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре // Конвективные течения. – 2013. – №. 6. – С. 155 – 167.
6. Дьякова В.В., Полежаев Д.А. Динамика сыпучей среды в либрирующем цилиндре // Конвективные течения. – 2015. – №. 7. – С. 226 – 236.
7. Дьякова В. В., Субботин С. В. Влияние инерционных волн на устойчивость границы раздела «жидкость - сыпучая среда» в либрирующем цилиндре //Конвективные течения. – 2017. – №. 8. – С. 66 – 79.
8. Власова К. А., Дьякова В. В., Полежаев Д. А. Экспериментальное изучение рельефа на поверхности сыпучей среды в неравномерно вращающемся горизонтальном цилиндре с жидкостью // Конвективные течения. – 2019. – №. 9. – С. 139 – 151.
9. Dyakova V.V., Polezhaev D.A. Inertial waves and pattern formation inside a rotating cylinder // Selected Papers of International Conference Fluxes and Structures in Fluids. Russia. St. Petersburg. June 25–28 2013. – 2014. – P. 87 – 92.

10. Dyakova V.V., Polezhaev D.A. Dynamics of granular medium in a rotating horizontal cylinder partially filled with liquid // Proc. Fluxes and Structures in Fluids. Russia. St. Petersburg. June 25-28 2013. – 2013. – P. 90 – 92.
11. Dyakova V.V., Polezhaev D.A. Pattern formation inside a rapidly rotating horizontal cylinder partially filled with liquid and granular medium // Proc. Advanced Problems in Mechanics Conference APM2014. Russia. St. Petersburg. June 30-July 5 2014. – 2014. – P. 258-262 (CD).
12. Dyakova V.V., Polezhaev D.A. The oscillatory fluid motion inside a rapidly rotating cylinder under gravity // Proc. 5th International Scientific School of young scientists «Waves and Vortices in Complex media». Russia. Moscow. – 2014. – P. 35 – 37.
13. Дьякова В.В., Полежаев Д.А. Экспериментальное изучение колебательного и осредненного движения центрифугированного слоя жидкости во вращающемся цилиндре // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2015. – С. 1254-1256.
14. Дьякова В.В., Полежаев Д.А., Субботин С.В. Влияние инерционных волн на динамику сыпучей среды во вращающейся полости с жидкостью //Материалы 7 Международной научной школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах». Москва. 30 ноября – 02 декабря 2016. – 2016. – С. 69 – 71.